Die Behandlung der häufigsten mathematischen Aufgaben mit der Rechenmaschine

BRUNSVIGA 20

von Dr. - Ing. Fritz Wachendorf

BRUNSVIGA MASCHINENWERKE AG. BRAUNSCHWEIG

Die Behandlung der häufigsten mathematischen Aufgaben

mit der Rechenmaschine BRUNSVIGA 20

von

Dr.-Ing. Fritz Wachendorf

BRUNSVIGA MASCHINENWERKE AG., BRAUNSCHWEIG

Inhaltsverzeichnis

BRUNSVIGA
MASCHINENWERKE AG.
BRAUNSCHWEIG

Dr.-Ing. Fritz Wachendorf:

Die Behandlung der häufigsten mathematischen Aufgaben mit der Rechenmaschine BRUNSVIGA 20

1. EINFÜHRUNG

1,1 Allgemeines

Die Kenntnis der BRUNSVIGA 20 und ihre Handhabung bei Durchführung der einfachen Rechenoperationen wird vorausgesetzt. Diese Zusammenstellung soll Fortgeschrittenen einige Hinweise geben, in welcher Weise die häufigsten mathematischen Aufgaben mit Hilfe der Maschine zu behandeln sind. Wo es irgendwie möglich war, ist von dem Gebrauch höherer Mathematik abgesehen worden.

Vom Verfasser wurde die im Literaturverzeichnis angeführte Literatur benutzt. Soweit die Darstellungen sich nicht auf diese Veröffentlichungen zurückführen lassen, handelt es sich um unabhängige Arbeiten.

1,2 Bezeichnungsweise

Um ständige Wiederholungen zu vermeiden, werden im Text vielfach Abkürzungen gebraucht. Und zwar bedeuten

R: Resultatwerk,
E: Einstellwerk,
Z: Zählwerk,
S: Schlittenstellung,
r: die im Resultatwerk erscheinende Zahl,
e: Die im Einstellwerk eingestellte Zahl,
z: Die im Zählwerk erscheinende Zahl,
a: Annäherungswert.

Alle Rechenvorgänge werden in der nachstehenden Anleitung durch eine besondere "Rechenmaschinenschrift" schematisch dargestellt:

Die drei Werke der BRUNSVIGA 20 werden durch drei übereinander angeordnete Rechtecke bezeichnet:

Z	Z = Umdrehungs-Zählwerk	z	die darin stehenden Werte
E	E = Einstellwerk	e	
R	R = Resultatwerk	r	

In diesem Rechenschema sind
die einzustellenden Werte (Buchstaben oder Zahlen)
offen, d.h. ungeklammert
(Einstellwerte), a
die während des Rechenvorganges einzukurbelnden
oder zu beachtenden
Werte zwischen Ausrufzeichen (Achtungswerte) !b!
die am Ende der Rechnung sich ergebenden Werte
zwischen Anführungsstrichen (Ergebniswerte) "c"
dargestellt.

Das aus der Berechnungsformel hervorgehende "Formel-Vorzeichen" (z.B. das Minus-Vorzeichen in der Formel $c = a - b \cdot d$) ist in den "allgemeinen" (Buchstaben-)Schemata im Kreise angegeben. Seine Kombination mit dem (wechselnden) "Wert-Vorzeichen" des Rechenwerk-Wertes ergibt das ⊕
"wirksame Vorzeichen", welches für die unter 1,4 angegebenen Vorzeichen ⊖

regeln gültig ist; es ist in den "speziellen" (Zahlen-)Schemata ebenfalls im Kreise angegeben.

Ziffern in runden Klammern bezeichnen die Kommastellung, d.h. die rechts vom Komma abzuteilende Stellenzahl. (6)

Die Nullstellung eines Werkes wird, soweit angegeben, durch den Einstellwert 0,0 bezeichnet. 0,0

Negative Zahlen in dem R-Werk erscheinen dort als dekadische Ergänzungszahlen und sind als Einstellwerte in dieser Form auch einzustellen (s.a.1,4). 999 32

Ein Gleichheitszeichen an der Stelle eines Einstellwertes bedeutet abgekürzt, daß der Wert eines vorhergegangenen Rechenganges für den nächsten als Einstellwert stehen bleibt. =

Drei Punkte zwischen zwei Zahlenwerten bedeuten, daß der Zwischenraum zwischen ihnen mit "Puffernullen" oder auch - wenn der rechte Wert negativ und als dekadische Ergänzung eingestellt ist - mit Neunen ausgefüllt ist. Drei Punkte unmittelbar hinter einem Zahlenwert deuten nicht angegebene überschüssige Stellen an. a...b

Ein Apostroph über dem mittleren dieser 3 Punkte im R-Werk symbolisiert die Einschaltung der "partiellen" Löschung. .!.

Ein E-Werk-Wert zwischen zwei Trennungsstrichen ist dort durch Rückübertragung aus dem R-Werk eingestellt, wobei die dabei erfolgende Nullstellung des R-Werks zugleich durch /0,0/ zwischen Trennungsstrichen gekennzeichnet wird. /a/ /0,0/

Die Schlittenstellung wird links neben dem R-Werk-Symbol durch S mit der im Deckenausschnitt erscheinenden Ziffer dargestellt. S/8

1,3 Kommata und ihre Kennzeichnung

Wir beginnen mit einem Beispiel und stellen Hebel 5 des E-Werkes (kurz als E 5 bezeichnet) auf "1" und einen Kommazeiger zwischen E 5 und E 4. Somit ist

$$e = 1,0$$

oder, wenn die Anzahl der durch das Komma abgetrennten Dezimalen durch eine eingeklammerte Zahl angedeutet wird,

$$e = 1,0(4).$$

Man bringe den Schlitten in eine solche Stellung, daß im Deckenausschnitt eine grüne 6 erscheint und der Stellenzeiger des Zählwerks über der grünen 6 steht. In dieser Stellung 6 (kurz mit "S 6" bezeichnet) mache man eine +Drehung, worauf eine 1 in Z 6 (unter der grünen 6 des Zählwerks) und eine 1 in R 10 (unter der grünen 10 des Resultatwerkes) erscheint.

Dieser Vorgang läßt sich als Multiplikation 1 x 1 = 1 auffassen, wenn

$$e = 1,0(4)$$
$$z = 1,0(5)$$
$$r = 1,0(9)$$

ist.

Durch Ausführung einer solchen Probemultiplikation 1 x 1 = 1 kann man sich die Anwendung der Kommaregel

> "Die Anzahl der in R durch das Komma abgetrennten Stellen ist gleich der Summe der in Z und E abgetrennten Stellen"

bisweilen vereinfacht vor Augen führen.

(E)+(Z)=(R)	z.B.	(E4)+(Z5) = (R9)
oder (E)=(R)-(Z)		(E4)=(R9) - (Z5)
und (Z)=(R)-(E)		(Z5)=(R9) - (E4)

0,0	!1,0!	(5)
1,0		(4)
0,0	!1,0!	(9)

1,4 Negative Zahlen und dekadische Ergänzungen

Grundsätzlich können in Z, E und R negative Zahlen durch dekadische Ergänzungen dargestellt werden. Ein solches Verfahren ist jedoch bisweilen ausgesprochen unzweckmäßig, da die Kapazität der Maschine herabgesetzt wird. Eine wahlweise Änderung der Vorzeichenregeln je nach dem Aufgabentyp wiederum birgt die Gefahr der Unklarheiten in sich und führt zu einer Häufung von Vorzeichenfehlern. Um diesen und ähnlichen Gesichtspunkten Rechnung zu tragen, sind hier bestimmte Grundsätze bezüglich der Vorzeichen eingehalten worden.

Die Aufgaben sind ausnahmslos so behandelt, daß im Zählwerk keinerlei dekadische Ergänzungen auftreten. Weiße Zahlen in Z bedeuten stets positive, rote Zahlen stets negative Werte.

Im Einstellwerk dürfen negative Werte ohne Einschränkung durch dekadische Ergänzungen dargestellt werden, wenn irgendeine positive Zahl oder eine Hilfseins vorausgeht. Beispielsweise ergeben

a) +1(11) und -227(1) insgesamt das Bild 0,999 999 977 3,0 ;
b) +1(11) und +227(1) insgesamt das Bild 1,000 000 022 7,0 .

Hingegen werden Gruppen wie

c) -1(11) und -227(1);
d) -1(11) und +227(1);
e) -227(1)

nach dieser Anleitung nicht in E eingestellt, da die erste Zahl negatives Vorzeichen hat. Selbstverständlich kann +227(1) auch allein ohne Hilfseins in E dargestellt werden.

Die Aufgaben sind ferner stets so behandelt, daß dekadische Ergänzungen im Resultatwerk negative Werte charakterisieren. So ist in R

die dekadische Ergänzung 999 921(14) stets als - 79,
dagegen 79(14) stets als + 79

aufzufassen.

Für die Drehrichtung:

a. Gleichnamige, wirksame Vorzeichen im E- und Z-Werk: +Drehung,
b. Ungleichnamige, wirksame Vorzeichen im E- und Z-Werk: -Drehung.

Für die Ablesung des Z-Werkes demgemäß:

a. Positive Vorzeichen im E-Werk ergeben im Z-Werk für
weiße Ziffern positive Werte, } d.h. in diesem Falle gilt
rote Ziffern negative Werte. } im Z-Werk die Eigenfarbe.

b. Negative Vorzeichen im E-Werk ergeben im Z-Werk für
rote Ziffern positive Werte, } d.h. in diesem Falle ist im Z-Werk
weiße Ziffern negative Werte, } mit der Gegenfarbe zu rechnen.

Selbstverständlich gelten die Vorzeichenregeln auch für die Divisionen sowohl in der additiven wie in der subtraktiven Form:

a) Additive Division: $x = \frac{a}{b}$; $b \cdot x = a$

⊕	"x"	
⊕	b	+Drehung
	!a!	

b) Subtraktive Division: $x = \frac{a}{b}$; $a - b \cdot x$ = Null

⊕	"x" rot	
⊖	b	-Drehung
a	0,0	

2. WURZELN

2,1 Quadratwurzeln

2,11 Das Töplersche Verfahren und verwandte Methoden

Von Professor Töpler wurde vor Jahrzehnten ein Verfahren entwickelt, das heute vielfach zum Quadratwurzelziehen benutzt wird. Zum besseren Verständnis der grundsätzlichen Vorgänge wird hier das Verfahren ein wenig abgeändert dargestellt.

Wir wollen von einer Methode ausgehen, bei welcher stets

(1) $$z^2 = r$$

ist, wenn z und r die jeweils in Z und R erscheinenden Zahlen bezeichnen. Zu irgendeinem Zeitpunkt 1 seien

(2) $$\begin{cases} z_1 = a \;; \\ e_1 = 2a + b; \\ r_1 = a^2 \;, \end{cases}$$

wobei a und b beliebige positive Werte haben. Führt man jetzt b positive Umdrehungen durch, so erhöht sich z um b und ferner r um das Produkt b(2a+b), so daß im Zeitpunkt 2:

(3) $$z_2 = a + b \;; \qquad r_2 = a^2 + b \cdot (2a+b)$$

Durch Ausmultiplizieren der Klammer ergibt sich

(5) $$r_2 = a^2 + 2ab + b^2$$

oder, da $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ ist,

(6) $$r_2 = (a+b)^2$$

Beim Vergleich von (3) und (6) folgt

(7) $$r_2 = {z_2}^2.$$

Wir fassen Gleichung (1) bis (7) zu folgendem Satz zusammen:

> Wenn $r_1 = {z_1}^2$ ist und $e_1 = 2z_1+b$ in E eingestellt wird, ist nach b +Drehungen $r_2 = {z_2}^2$, und zwar unabhängig davon, wie groß b gewählt wurde.

Dieser Satz ist die theoretische Grundlage eines Verfahrens zum Quadratwurzelziehen.

2,111 Hierzu ein Beispiel:

Es soll die Quadratwurzel aus 7796,89 gezogen werden.

Kommata nach Belieben wählen und z.B. 3; 5; 3+5=8 Stellen in Z; E und R abtrennen.

b gleichfalls nach Belieben wählen, wobei es jedoch praktisch ist, für b Zehnerpotenzen wie 100; 10; 1; 0,1 usw. einzusetzen, da dann Kopfrechnen fortfällt. Wenn beispielsweise z = 0(3) ist und man b = 10 wählt, so hat man nach dem soeben abgeleiteten Satz e = 2z+b = 10(5) einzustellen (Hebel 7 auf "1" zu stellen) und b = 10(3) +Drehungen zu machen. Und so fort. Wir fangen mit z = 0 an und versuchen, nach und nach die Quadratzahl 7796,89(8) in R zu erzeugen:

b = 10, Hebel 7 auf "1" stellen, eine +Drehung in S5,
b = 10, " " " "3" " , " " ,
b = 10, " " " "5" " , " " ,
b = 10, " " " "7" " , " " ,
b = 10, " " " "9" " , " " ,
b = 10, Hebel 7 auf "1"
Hebel 8 auf "1" stellen, eine +Drehung,
b = 10, Hebel 7 auf "3" stellen, eine +Drehung,
b = 10, " " " "5" " , " " ,
b = 10, " " " "7" " , " " .

Bei richtiger Bedienung muß jetzt 170 (5) in E eingestellt sein, während 90(3) in Z und 90^2 = 8100(8) in R erscheinen.

Da das Quadrat 8100 größer ist als der Radikand 7796,89, eine -Drehung, Schlitten in die nächste Stellung (S4) rücken und e um das letzte b verringern, d.h. Hebel 7 auf "6" zurückstellen.

b = 1, Hebel 6 auf "1" stellen, eine +Drehung,
b = 1, " " " "3" " , " " ,
b = 1, " " " "5" " , " " ,
b = 1, " " " "7" " , " " ,
b = 1, " " " "9" " , " " ,
b = 1, Hebel 6 auf "1"
Hebel 7 auf "7" stellen, eine +Drehung,
b = 1, Hebel 6 auf "3" stellen, eine +Drehung,
b = 1, " " " "5" " , " " ,
b = 1, " " " "7" " , " " .

Nunmehr sind z = 89(3), e = 177(5) und r = 89^2 = 7921(8). Da 7921 größer ist als der Radikand 7796,89, eine -Drehung, Schlitten auf nächste Stellung (S3) bringen, e um das letzte b verringern (Hebel 6 zurück auf "6").

b = 0,1, Hebel 5 auf "1" stellen, eine +Drehung,
b = 0,1, " " " "3" " , " " ,
b = 0,1, " " " "5" " , " " .

Es erscheinen z = 88,3(3) und r = $88,3^2$ = 7796,89(8).

Es ist also

$$\sqrt{7796,89} = 88,3.$$

Die Wurzel ist hiermit gefunden.

112 Eine weitere bemerkenswerte Methode zur Ermittlung der Wurzel besteht darin, von z und r = 0 auszugehen und durch Wahl von b = 80, dann b = 8 und schließlich b = 0,3 die Quadrate von 80; 88 und 88,3 unmittelbar nacheinander zu erzeugen. Hierbei muß der Rechner jeweils abschätzen, welche b-Werte am besten zum Ziel führen. Obwohl diese Methode schnelleres Arbeiten erlaubt, sei auf ihre Wiedergabe hier verzichtet, da der Schnellrechner meist zu ausgesprochenen Schnellrechenverfahren greifen wird.

2,113 Beim eigentlichen Töplerverfahren, auf welches wir jetzt kommen, bleibt die Summe $z^2 + r$ stets konstant, nämlich gleich dem Radikanden x^2 (x möge die gesuchte Wurzel sein):

(8) $z^2 + r = x^2$

Bei der Bedienung der Maschine muß man im Falle des Töplerverfahrens jedesmal vor Ausführung von b +Drehungen (b beliebig!) in E_r

(9) $e = -2z - b$

eingestellt haben, wobei z negativ und - 2z positiv ist, da in Z rote Ziffern erscheinen. Im Falle von -Drehungen ist b negativ und -b positiv.

Beim Töplerverfahren gehört zur Aufgabe $\sqrt{7796{,}89}$ die folgende Bedienungsvorschrift.

Die Kommata werden nach Belieben gewählt und mögen 6; 5 und 6+5 = 11 Stellen in Z; E und R abtrennen.

In R den Radikanden x^2 = 7796,89 (11) einstellen.

Schlitten auf S8 rücken.

b zunächst jeweils gleich -10 wählen.

Hebel 7 auf "1" stellen, eine -Drehung,
" " " "3" " , " " ,
" " " "5" " , " " ,
" " " "7" " , " " ,
" " " "9" " , " " .
Hebel 7 auf "1"
Hebel 8 auf "1" stellen, eine -Drehung,
Hebel 7 auf "3" stellen, eine -Drehung,
" " " "5" " , " " ,
" " " "7" " , " " ,

In R erscheint eine Ergänzungszahl, daher eine +Drehung, Schlitten einmal weiterrücken (auf S7) und Hebel 7 auf "6" stellen. Jetzt sind

z = -80,0(6); e = 160,0(5); r = 1396,89(11),

und müssen Gleichung (8) erfüllen, die stets gilt:

$(-80)^2$ + 1396,89 = 7796,89

b jeweils gleich - 1 wählen.

Hebel 6 auf "1" stellen, eine -Drehung,
" " " "3" " , " " ,
" " " "5" " , " " ,
" " " "7" " , " " ,
" " " "9" " , " " ,
Hebel 6 auf "1"
Hebel 7 auf "7" stellen, eine -Drehung,
Hebel 6 auf "3" stellen, eine -Drehung,
" " " "5" " , " " ,
" " " "7" " , " " .

Wegen der in R erschienenen Ergänzungszahl eine +Drehung, Schlitten einmal weiterrücken (auf S6) und Hebel 6 auf "6" stellen. Jetzt sind

z = -88(6); e = 176(5); r = 52,89(11)

b jeweils gleich -0,1 wählen.

Hebel 5 auf "1" stellen, eine -Drehung,
" " " "3" " , " " ,
" " " "5" " , " " .

Es ist z = -88,3(6); e = 176,5(5); r = 0, woraus nach (8)

$(-88{,}3)^2$ = 7796,89

oder 88,3 = $\sqrt{7796{,}89}$

folgt.

In Fällen, wo Zweifel über die Töplersche Methode bestehen sollten, gibt Gleichung (9) Auskunft, während nach Gleichung (8) jederzeit eine gewisse Kontrolle der Zwischenresultate möglich ist.

2,12 Schnellverfahren zum Quadratwurzelziehen

Da das Töplersche Verfahren verhältnismäßig zeitraubend ist, sind von Herrmann*) und verschiedenen anderen Autoren Schnellverfahren veröffentlicht worden, welche ein besseres Arbeiten gestatten. Hier ist eine Methode entwickelt, die eine gewisse Ähnlichkeit mit der von Herrmann hat.

Meistens sind die Werte der Wurzeln angenähert bekannt. Man hat einen Wert a, der ungefähr gleich der gesuchten Wurzel x ist.

(1) $a \approx x$

Man stellt a in E ein und macht a positive Kurbelumdrehungen, woraufhin im Zeitpunkt 1

(2) $z_1 = a; \quad e_1 = a; \quad r_1 = a^2$

sind. In E ersetzt man den Faktor a bei unveränderter Kommastellung durch 2a und kurbelt ohne vorherige Löschung weiter, bis in R ein Wert nahe dem Radikanden x^2 erscheint.

Werden die jetzt in Z; E und R dargestellten Zahlen als z_2, e_2 und r_2 bezeichnet, dann hat die Kurbel z_2-z_1 Umdrehungen gemacht, wodurch in R der ursprüngliche Wert a^2 um den Betrag $(z_2-z_1)\cdot 2a$ vergrößert wurde. Oder in Form einer Gleichung

(3) $r_2 = a^2 + (z_2-z_1)\cdot 2a.$

Es ist übersichtlicher, die Differenz z_2-z_1 kurz als Δz zu bezeichnen und deshalb Gleichung (3) in

(4) $r_2 = a^2 + 2a\,\Delta z$

umzuformen. Auf beiden Seiten der Gleichung (4) füge man Δz^2 hinzu

(5) $r_2 + \Delta z^2 = a^2 + 2a\Delta z + \Delta z^2$

und hat, da $a^2 + 2a\,\Delta z + \Delta z^2 = (a+\Delta z)^2$ ist,

(6) $r_2 + \Delta z^2 = (a + \Delta z)^2.$

Wegen $a = z_1$ (siehe Gleichung (2)) und $\Delta z = z_2 - z_1$ (siehe die in Gleichung (4) eingeführte Abkürzung) ist

$a + \Delta z = z_1 + z_2 - z_1 = z_2$ und $(a + \Delta z)^2 = z_2^2$. Man setzt das in Gleichung (6) ein und hat

(7) $r_2 + \Delta z^2 = z_2^2.$

Gleichung (7) ist die Grundgleichung, auf die sich ein Schnellverfahren aufbaut, das jetzt durch ein Beispiel erläutert wird.

Es soll $\sqrt{2}$ ermittelt werden, wobei bekannt ist, daß die Wurzel ungefähr gleich 1,4 ist ($x^2 = 2$; $a = 1,4$).

Die Kommata willkürlich so einstellen, daß sie 6; und 6 + 6 = 12 Stellen in Z; E und R abtrennen.

a = 1,4(6) in E einstellen (Hebel 7 und 6 auf "1" und "4" stellen)
a = 1,4(6) Kurbeldrehungen durchführen, (eine +Drehung in S7 und 4 +Drehungen in S6).
In R13 bis R11 erscheint a^2 = 1,96(12).

Die in E eingestellte Zahl unter Beibehaltung der Kommastellung verdoppeln (Hebel 7 von "1" auf "2", Hebel 6 von "4" auf "8" rücken). Weiterkurbeln, bis r dem Wert 2 möglichst nahe kommt.

*) Siehe Literaturverzeichnis

Es ist hier zweckmäßig, nur solange zu kurbeln, bis sich die Anzahl der Ziffern von z_1 ungefähr verdoppelt hat. Da 1,4 zwei Ziffern hat, wird man eine vierziffrige Zahl in Z erzeugen und erhält:

$$z_2 = 1{,}414(6); \quad e_2 = 2{,}8(6); \quad r_2 = 1{,}9992(12).$$

Nach (7) gilt exakt $\underline{1{,}9992 + 0{,}014^2 = 1{,}414^2}$ oder angenähert, da $1{,}992+0{,}014^2$ etwa gleich 2 ist, $\sqrt{2} \approx 1{,}414$. Der grobe Wert 1,4 führt nach dem Verfahren zum wesentlich genaueren Wert 1,414 für die Wurzel.
Zu diesem Zeitpunkt, der als Zeitpunkt 3 bezeichnet sei, könnte man das Näherungsverfahren mit dem Ausgangswert 1,414 statt 1,4 wiederholen, um auf diese Weise die Wurzel wieder genauer (gleich 1,414 213) zu finden.
Man würde dabei unter Beibehaltung der Kommata später

$$z_2 = 1{,}414(6) \text{ in Z}; \; e_3 = 2{,}828(6) \text{ in E}; \; r_2 = 1{,}999\,396(12) \text{ in R}$$

erhalten. Zu dieser Einstellung kommt man schneller, wenn man im Zeitpunkt 3 in E die Differenz Δz addiert, d.h. 2,814(6) statt 2,8(6) in E einstellt, Δz negative Umdrehungen macht (vier -Drehungen in S4 und eine -Drehung in S5) durchführt, nochmals Δz in E addiert, d.h. 2,828(6) statt 2,814(6) in E einstellt, und Δz positive Umdrehungen (eine +Drehung in S5 und vier +Drehungen in S4) ausführt.
Kurbelt man nun weiter, um eine Zahl möglichst nahe dem Radikanden 2 in R zu erzeugen, hat man schließlich

$$z_3 = 1{,}414\,213(6) \text{ in Z}; \; e_3 = 2{,}828(6) \text{ in E};$$
$$r_3 = 1{,}999\,998\,364(12) \text{ in R},$$

weshalb nach Gleichung (7)

$$1{,}999\,998\,364 + 0{,}000\,213^2 = 1{,}414\,213^2 \text{ ist.}$$

Die Wurzel aus 2 ist somit zu 1,414 bei einmaliger und zu 1,414 213 bei zweimaliger Anwendung des Annäherungsverfahrens gefunden. In der Praxis liegen die Verhältnisse insofern anders, als häufig der Radikand x^2 infolge einer vorhergehenden Rechnung bereits in R vorhanden ist. Beispielsweise sei $x^2 = 2{,}0(12)$ in R eingestellt. Man bringt in diesem Falle 2,0(12) etwa bei Schlittenstellung 6 mit Hilfe der Rückübertragungsvorrichtung nach E und macht eine negative Kurbeldrehung, woraufhin die Ergänzungszahl von 2,0(12) in R erscheint. Nach Löschung von Z und E kann man bezüglich aller in Z und E erscheinenden Werte das alte Verfahren unverändert anwenden. Die R-Werte jedoch sind naturgemäß um den Radikanden $x^2 = 2{,}0$ erniedrigt, weshalb man beim Weiterkurbeln nicht den Radikanden $r = 2{,}0(12)$, sondern $r = 0$ zu erzeugen hat. Außerdem gilt statt Gleichung (7) die ebenfalls exakte Gleichung

(8) $$r_2 + x^2 + \Delta z^2 = z_2^2,$$

oder noch leichter Umformung

(9) $$x = \pm \sqrt{z_2^2 - \Delta z^2 - r_2} \approx \pm z_2$$

<u>Schematische Darstellung</u>

$x = \sqrt{R}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad x = \sqrt{2}$

Erste Annäherung $a_1 \approx x$ $\qquad\qquad a_1 = 1{,}4$

1)

$Z_1 = 0{,}0$ $!Z_2 = a_1!$	0,0 !1,4!	(6)	
$e_1 = a_1$	1,4	(6)	+Drehung
$r_1 = 0{,}0$ "r_2" $= a_1{}^2!$	0,0 "1,96"	(12)	

2)	a_1 "$z_3 = a_2 \approx x$"	1,4 "1,414" (6)	
	$e_2 = 2a_1$	2,8 (6)	+Dreh.
	a_1^2 !$r_3 \approx R$!	1,96 !1,9992! (12)	

Wiederholung mit dem zweiten Näherungswert

$a_2 \approx x$ $\qquad\qquad$ $a_2 = 1,414$

Zunächst umkurbeln auf $r_2" = a_2^2$:

3a)	a_2 !a_1!	414 !1,400! (6)	
	$2a_1 + \Delta z_1$	2,814 (6)	-Dreh.
	r_2 "r_2'"	1,9992 "1,959 804" (12)	
b)	a_1 !a_2!	1,400 1,414! (6)	
	$2a_1 + 2\Delta z_1 = 2a_2$	2,828 (6)	+Dreh.
	r_2' "r_2" $= a_2^2$"	1,959 804 "1,999 396" (12)	

Dann Wiederholung des obigen Verfahrens:

	a_2 "$z_3 = a_3 \approx x$"	1,414 "1,414 213" (6)	
	$2a_2$	2,828 (6)	+Dreh.
	a_2^2 !$r_3 \approx R$!	1,999 396 !1,999998364! (12)	

usf.

2,2 Kubikwurzeln

Das Problem, die 3. Wurzel zu ziehen, wurde bereits auf verschiedene Arten gelöst. Einerseits sind die meisten exakten Methoden allzu umständlich, andererseits lassen die Näherungsverfahren für gewöhnlich keinen Schluß zu, wie genau die Ergebnisse sind. Man kann indessen die Vorteile beider Methoden vereinigen und Schnellverfahren anwenden, die einen klaren Überblick über die Größe der Restfehler geben.

Die dritte Wurzel des Radikanden x^3 sei angenähert als a bekannt:

(1) $\qquad a \approx x.$

Um mit Hilfe der Annäherung a einen weit genaueren Näherungswert zu bekommen, multipliziere man a mit sich selbst und bringe das so erhaltene a^2 durch Rückübertragung (mit dem Gesamtlöschhebel, um gleichzeitig Z zu löschen) von R nach E. Dann multipliziere man a^2 nochmals mit a und hat im Zeitpunkt 1

(2) $\qquad z_1 = a; \quad e_1 = a^2; \quad r_1 = a^3.$

Hierauf a^2 in E durch $3a^2$ ersetzen und ohne vorherige Löschung weiterkurbeln, bis in R ein Wert nahe x^3 erscheint. Die jetzt in Z, E und R vorhandenen Zahlen seien als z_2, e_2 $(= 3a^2)$ und r_2 bezeichnet.

Der Faktor $e_2 = 3a^2$ ist also mit $(z_2 - z_1)$ multipliziert worden. Das dabei entstandene Produkt $3a^2(z_2-z_1)$ wurde zu r_1 addiert und ergab r_2. Oder in Form einer Gleichung

(3) $\qquad r_1 + 3a^2(z_2-z_1) = r_2.$

In Gleichung (3) ersetzt man z_1 und r_1 gemäß Gleichung (2) durch a und a^3 und hat

(4) $a^3 + 3a^2\,(z_2-a) = r_2$

oder, wenn auf beiden Seiten der Gleichung (4) die Glieder $3a(z_2-a)^2$ und $(z_2-a)^3$ addiert werden,

(5) $a^3 + 3a^2\,(z_2-a) + 3a(z_2-a)^2 + (z_2-a)^3 = r_2 + 3a(z_2-a)^2 + (z_2-a)^3$.

Die linke Seite von Gleichung (5) ist, wie man sofort sieht, der Kubus von $a + (z_2-a)$ oder noch kürzer der Kubus von z_2:

(6) $z_2{}^3 = r_2 + 3a(z_2-a)^2 + (z_2-a)^3$.

In Gleichung (6) lassen sich die beiden letzten Glieder noch zusammenfassen, da sie den gemeinsamen Faktor $(z_2-a)^2$ haben:

(7) $z_2{}^3 = r_2 + \left[3a + (z_2-a)\right] \cdot (z_2-a)^2$.

Dies ist die wichtigste Gleichung zum Kubikwurzelziehen.
Hierzu ein Beispiel.
Es soll die Kubikwurzel aus 50 gezogen werden; sie ist angenähert als 3,68 bekannt.

$x^3 = 50; \qquad a = 3,68.$

Die Stellung der Kommata nach Gutdünken festlegen, wobei natürlich stets die Kommaregel zu beachten ist; a = 3,68(3) in E einstellen und mit z = 3,68(4) = a multiplizieren; R zeigt dann $a^2 = 13,5424(7)$.

In S1 a^2 mit Hilfe der Rückübertragungseinrichtung nach E übertragen und drei +Drehungen durchführen. Nach Löschung von Z sind

$z = 0(0); \quad e = 13 = 13,5424(7) = a^2; \quad r = 40,6272(7) = 3a^2.$

Nach Multiplikation mit z = 3,68(10) in S11 bis S9 erscheint zusätzlich $r = 49,836\,032(17) = a^3$.

Es handelt sich jetzt darum, den in R9 bis R4 gespeicherten Faktor $3a^2$ = 40 6272(7) nach E zu übertragen, ohne daß z = 3,68(10) und r = 49,836 032 (17) gelöscht werden. Dies geschieht nach Einstellung auf partielle Löschung durch Rückübertragung, also Betätigung des E-Löschhebels und des R-Löschhebels in Schlittenstellung S1. Diese Rückübertragung darf nur in Schlittenstellung 1 vorgenommen werden, weil in E das Komma im Falle $e = 3a^2$ genau so viel Stellen abtrennen muß wie im Falle $e = a^2$. Hieraus läßt sich die Regel ableiten, daß die Rückübertragung von $3a^2$ nach E nur in derjenigen Schlittenstellung erfolgen darf, in welcher die drei +Drehungen erfolgten. Jetzt sind

$z = 3,68(10) = a; \quad e = 40,6272(7) = 3a^2; \quad r = 49,836\,032(17) = a^3.$

Weiterkurbeln, bis r sich dem Wert des Radikanden 50 nähert. Hierbei ist es wieder zweckmäßig, nur solange zu kurbeln, bis sich die Stellenzahl von z_1 ungefähr verdoppelt hat. Da $z_1 = 3,68(10)$ nur drei Stellen hat, z_2 also mit sechs Stellen einkurbeln.

Bei $r_2 = 49,999\,759\,616(17)$ und $z_2 = 3,68403(10)$ kommt man dem Radikanden 50 sehr nahe und hat, wenn man in Gleichung (7) die Zahlen dieses Beispiels einsetzt,

$$3,68403^3 = 49,999\,759\,616 + (3.3.68+0,00403)\cdot 0,00403^2.$$

Man erkennt, daß die rechte Seite der Gleichung angenähert gleich dem Radikanden 50 ist und daher

$$3,68403^3 \approx 50$$

oder

$$3,68403 \approx \sqrt[3]{50}.$$

,2 Schematische Darstellung

$x = \sqrt[3]{R}$ $\qquad$ $x = \sqrt[3]{50}$

Erste Annäherung $\quad a_1 \approx x$ $\qquad$ $a_1 = 3,68$

1a) Berechnung von $r_o = a^2$

0,0	!a!
a	
0,0	"a^2"

0,0	!3,68!	(4)
3,68		(3)
0,0	"13,5424"	(7)

b) Berechnung von $r_0' = 3a^2$ im rechten Teil von R

	0,0 !3! (0)
	e_1 -/a^2/
S1	/0,0/!$3a^2$!

	0,0 !3!	(0)
	/13,5424/	(7)
S1	/0,0/ "40,6272"	(7)

c) Berechnung von $r_1 = a^3$ im linken Teil von R

0,0 !z_1 = a!
$e_1 = a^2$
0,0...$3a^2$ "$a^3 = r_1$"...$3a^2$

	0,0 !3,68!	(10)	(0)
	13,5424	(7)	
S11-9	="49,836032"...40,6272	(17)	(7)

Rückübertragung (partiell!) von $3a^2 = e_2$ nach E in S1

2) Umkurbeln von $r_1 = a^3$ in $r_2 \approx R \approx {z_2}^3$

$z_1 = a_1$ "$z_2 \approx x$"
$e_2 = 3a^2$
$r_1 = a^3$!$r_2 \approx R$!

	3,68 = a "3,68403"	(10)
	/40,6272/ = $3a^2$	(7)
S8-6	49,836032.../0,0/ !49,999759616!	(17)

,3 Fünfte und höhere Wurzeln

Da in der Praxis 5. und höhere Wurzeln selten sind, werden sie nur kurz gestreift.
Wenn x die n-te Wurzel aus A ist, erhält man x durch Auflösung der Gleichung n-ten Grades

$$x^n - A = 0.$$

Die Behandlung von derartigen Gleichungen geht aus späteren Kapiteln hervor. Ein noch besseres Verfahren ergibt sich aus dem Satz: "Wenn das Produkt von n annähernd gleichen Faktoren gleich A ist, so ist die n-te Wurzel aus A angenähert gleich dem algebraischen Mittel der Faktoren."
Bei Anwendung dieses Satzes folgt aus einer 1. Annäherung a_1 eine zweite Annäherung a_2 nach der Formel

$$a_2 = \frac{(n-1)a_1 + \dfrac{A}{{a_1}^{n-1}}}{n} = a_1 + \frac{A - {a_1}^n}{n\, {a_1}^{n-1}},$$

-/12

die besonders dann sehr gute Resultate liefert, wenn a_1 dem wahren Wert der Wurzel ziemlich nahe ist.

3. DAS TABELLIEREN ALGEBRAISCHER FUNKTIONEN

3,1 Das Tabellieren algebraischer Funktionen aus dem Argument

Vielfach soll bei Funktionen der Form

$$y = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_o \text{ , z.B.:}$$

(1) $$y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_o \text{ ; } y = 1{,}3x^3 - 1{,}27x^2 + 0{,}753x$$

y für verschiedene Werte bestimmt werden. Solche Aufgaben lassen sich ohne Zwischennotierungen und ohne fortwährende Änderung der Kommastellung lösen.

3,11 In Gleichung (1) sei x = 3,7 gegeben. Zur Berechnung von y empfiehlt sich das folgende Verfahren. Durch beliebig gewählte Kommata 8; 5; 8+5 = 13 Stellen in Z; E; R abtrennen. Wenn jetzt der im Zählwerk angebrachte Stellenanzeiger die Einer des Zählwerks anzeigt, befindet sich der Schlitten in Stellung 9. In dieser Stellung 9 werden im Verlauf des Rechnungsganges Additionen, Subtraktionen und Rückübertragungen vorgenommen.

$e = a_3 = 1{,}3(5)$ mit $z = x = 3{,}7(8)$ multiplizieren und $e = a_2 = 1{,}27(5)$ mit Hilfe einer in S9 durchgeführten -Drehung subtrahieren. Das hierauf erschienene $r = 1{,}3x - 1{,}27 = 3{,}54(13)$ in S9 nach E rückübertragen, $e = 3{,}54(5)$ mit $z = x = 3{,}7(8)$ multiplizieren, dazu $e = a_1 = 0{,}753(5)$ durch eine +Drehung in S9 addieren. Nach in S9 vorgenommener Rückübertragung von $r = 1{,}3x^2 - 1{,}27x + 0{,}753 = 13{,}851(13)$ nach E und nach Multiplikation von $e = 13{,}851(13)$ mit $z = x = 3{,}7(8)$ erscheint

$$r = 1{,}3x^3 - 1{,}27x^2 + 0{,}753x = 51{,}2487(13) = y.$$

Die Aufgabe ist hiermit gelöst.

Wenn sich negative Zahlen häufen, besteht bezüglich der Vorzeichen die Gefahr der Unübersichtlichkeit. In diesem Falle ist es ratsam, in Abweichung von Abschnitt 1,4 auch in E gegebenenfalls mit Ergänzungszahlen zu arbeiten, wie sich am Beispiel x = - 3,7 am besten zeigt:

$e = a_3 = 1{,}3(5)$ mit $z = x = -3{,}7(8)$ multiplizieren, also 4 -Drehungen in S9 und 3 +Drehungen in S8 ausführen. $a_2 = 1{,}27(5)$ in E einstellen, in S9 eine -Drehung. Das hierauf erschienene $r = 9999\,993{,}92(13)$, welches $1{,}3x - 1{,}27 = -6{,}08$ darstellt, in S9 nach E rückübertragen und mit $z = x = -3{,}7(8)$ multiplizieren, dann $e = a_1 = 0{,}753(5)$ addieren. Wenn die 3 in R 20*) auf 0 zurückgestellt ist, ergibt sich $r = 1{,}3x^2 - 1{,}27x + 0{,}753 = 23{,}249(13)$.

In S9 Rückübertragung durchführen und $e = 23{,}249(5)$ mit $z = x = -3{,}7(8)$ multiplizieren. In R erscheint 9999913,9787(13), woraus

$$y = 1{,}3x^3 - 1{,}27x^2 + 0{,}753 = 9\,999\,913{,}9787 - 10\,000\,000 = -86{,}0213$$

folgt.

---

*) In der - nicht vorhandenen - Stelle R21 würde eine "6" stehen und zusammen mit der 3 in R20 den Multiplikator x = -3,7 darstellen entsprechend der in der - ebenfalls nicht vorhandenen - Stelle E 13 durch die Neunerbrücke dargestellten "Zähleins".

Schematische Darstellung:

0,0	!x!
a_3	
0,0	"$a_3 . x$"

(0,0)	!+1,0!
a_2	
= "$a_3 . x+a_2$"	

0,0	!x!
/$a_3 . x+a_2$/	
/0,0/	"$a_3x^2+a_2x$"

(0,0)	!+1,0!
a_1	
= "$a_3x^2+a_2x\ +a_1$"	

0,0	!x!
/$a_3x^2+a_2x+a_1$/	
/0,0/	"$a_3x^3+a_2x^2+a_1x$"

(0,0)	!+1,0!
a_o	
="$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_o$ = y"	

x = +3,7

0,0	!3,7!	(8)	
1,3		(5)	+Dreh.
0,0	"4,81"	(13)	

(3,7)*	!(2,7)!	(8)	
⊖ 1,27		(5)	-Dreh.
4,81	"3,54"	(13)	

0,0	!3,7!	(8)	
/3,54/		(5)	+Dreh.
/0,0/	"13,098"	(13)	

(3,7)*	!(4,7)!	(8)	
0,753		(5)	+Dreh.
13,098	"13,851"	(13)	

0,0	!3,7!	(8)	
/13,851/		(5)	+Dreh.
/0,0/	"51,2487"	(13)	

Im Beispiel ist a_o = 0,0

x = -3,7

0,0	!-3,7! rot	(8)	
1,3		(5)	-Dreh.
0,0	"9999995,19"	(13)	

0,0	!+1,0!	(8)	
⊖ 1,27		(5)	-Dreh.
= "9999993,92"		(13)	

0,0	!-3,7! rot	(8)	
/9999993,92/		(5)	-Dreh.
/0,0/	"3000022,496"	(13)	

0,0	!+1,0!	(8)	
⊕ 0,753		(5)	+Dreh.
=	"23,249"	(13)	

0,0	!-3,7! rot	(8)	
/23,249/		(5)	-Dreh.
/0,0/	"9999913,9787"	(13)	

* Löschung eingespart

3,12 Ein zweites Verfahren unter Verwendung der Speicherung in R_1.

	x = + 3,7			x = - 3,7		
0,0 !a_1!	0,0 !0,753!	(10)(1)		0,0 !0,753!	(10)(1)	
x	3,7	(7)	+Dreh.	- 3,7	(7)	-Dreh.
a_o "a_o + a_1.x"	0,0 "2,7861"	(17)(7)		0,0 "997,2139"	(17)(8)	
0,0 !x!	0,0 !3,7!	(1)		0,0 !-3,7!	(1)	
x	3,7	(7)	+Dreh.	- 3,7	(7)	+Dreh.
(a_o + a_1.x) .!. "x^2"	2,7861 ... "13,69"	(8)		997,2139 .!. "13,69"	(8)	
0,0 !a_2!	0,0 ! -1,27! rot	(10)		0,0 ! -1,27!	(10)	
/x^2/	/13,69/	(7)	-Dreh.	+ /13,69/	(7)	-Dreh.
(a_o + a_1.x) .!. /0,0/	2,7861 ... /0,0/	(17)		997,2139 .!. /0,0/	(17)	
"a_o + a_1.x + a_2.x^2"	"985,3998"			"979,8276"		
0,0 !x!	0,0 !3,7!	(1)		0,0 ! + 3,7 !	(1)	
x^2	13,69	(7)	+Dreh.	+ 13,69	(7)	+Dreh.
(a_o + a_1.x + a_2.x^2) .!. "x^3"	985,3998 .!. "50,653"	(8)		979,8276 .!. "-50,653"	(8)	
0,0 !a_3!	0,0 !1,3!	(10)		0,0 !1,3!	(10)	
/x^3/	/50,653/	(7)	+Dreh.	- /50,653/	(7)	-Dreh.
(a_o + a_1.x + a_2.x^2) .!. /0,0/	985,3998 .!. /0,0/	(17)		979,8276 .!. /0,0/	(17)	
"(a_o + a_1.x + a_2.x^2 + a_3.x^3)"	"51,2487"			"913,9787"		

-/15

5.2 Das Tabellieren algebraischer Funktionen aus den höheren Differenzen $n > m$.

Hat man - etwa nach dem eben beschriebenen Verfahren - aus einer Gleichung n^{ten} Grades eine Anzahl von mindestens n+1 Funktionswerten aufeinanderfolgender Argumente gleichen Abstandes errechnet, so kann man zur Berechnung der folgenden oder vorhergehenden Funktionswerte das hierunter beschriebene Verfahren anwenden.

Als Beispiel diene die Funktion dritten Grades

$$y = 18{,}4\,x^3 + 6{,}8\,x^2 - 4{,}4\,x - 1{,}4\ ,$$

welcher die Wertetabelle

$x_1 = 0{,}5$;	$y_1 = 0{,}4$;	$x_6 = 3{,}0$;	$y_6 = 543{,}4$;
$x_2 = 1{,}0$;	$y_2 = 19{,}4$;	$x_7 = 3{,}5$;	$y_7 = 855{,}4$;
$x_3 = 1{,}5$;	$y_3 = 69{,}4$;	$x_8 = 4{,}0$;	$y_8 = 1267{,}4$;
$x_4 = 2{,}0$;	$y_4 = 164{,}2$;	$x_9 = 4{,}5$;	$y_9 = 1793{,}2$;
$x_5 = 2{,}5$;	$y_5 = 317{,}6$;	$x_{10} = 5{,}0$;	$y_{10} = 2446{,}6$

entspricht. Unter der hier erfüllten Voraussetzung, daß die x-Werte gleiche Abstände haben, also $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots\ldots = x_{10} - x_9$ ist, pflegt man die Ausdrücke

$$\left.\begin{array}{l} y_2 - y_1 \\ y_3 - y_2 \\ \ldots\ldots \\ y_{10} - y_9 \end{array}\right\} \text{ als erste Differenzen}$$

$$\left.\begin{array}{l} (y_3-y_2)-(y_2-y_1) = y_3-2y_2+y_1 \\ (y_4-y_3)-(y_3-y_2) = y_4-2y_3+y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (y_{10}-y_9)-(y_9-y_8)=y_{10}-2y_9+y_8 \end{array}\right\} \text{ als zweite Differenzen,}$$

$$\left.\begin{array}{l} (y_4-2y_3+y_2)-(y_3-2y_2+y_1) = y_4-3y_3+3y_2-y_1 \\ (y_5-2y_4+y_3)-(y_4-2y_3+y_2) = y_5-3y_4+3y_3-y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (y_{10}-2y_9+y_8)-(y_9-2y_8+y_7)=y_{10}-3y_9+3y_8-y_7 \end{array}\right\} \text{ als dritte Differenzen,}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_5-4y_4+6y_3-4y_2+y_1 \\ y_6-4y_5+6y_4-4y_3+y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{10}-4y_9+6y_8-4y_7+y_6 \end{array}\right\} \text{ als vierte Differenzen}$$

zu bezeichnen und so fort. Die bei diesen Differenzausdrücken auftretenden Beizahlen

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & 1 & & -1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & -2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & -3 & & 3 & & -1 & & & \\
 & & 1 & & -4 & & 6 & & -4 & & 1 & & \\
 & 1 & & -5 & & 10 & & -10 & & 5 & & -1 & \\
1 & & -6 & & 15 & & -20 & & 15 & & -6 & & 1
\end{array}$$

ergeben das bekannte Pascalsche Dreieck, allerdings mit alternierenden Vorzeichen.

Es gilt nun:
In linearen Funktionen sind alle zweiten und höheren Differenzen gleich 0, in quadratischen Funktionen alle dritten und höheren Differenzen, in Funktionen dritten Grades alle vierten und höheren Differenzen, in Funktionen n-ten Grades alle (n+1)ten und höheren Differenzen.

In der eingangs erwähnten kubischen Funktion müssen daher alle vierten Differenzen gleich 0 sein, d.h.

$$0{,}4 - 4.19{,}4 + 6.69{,}4 - 4.164{,}2 + 317{,}6 = 0 \qquad (1)$$
$$19{,}4 - 4.69{,}4 + 6.164{,}2 - 4.317{,}6 + 543{,}4 = 0 \qquad (2)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$543{,}4 - 4.855{,}4 + 6.1267{,}4 - 4.1793{,}2 + 2446{,}6 = 0 \qquad (3)$$

Es müssen in der kubischen Funktion auch fünfte Differenzen gleich 0 sein, also

$$0{,}4 - 5.19{,}4 + 10.69{,}4 - 10.164{,}2 + 5.317{,}6 - 543{,}4 = 0 \qquad (4)$$

und so fort.

Sind von den fünf Funktionswerten 0,4; 19,4; 69,4; 164,2; 317,6 der Gleichung (1) vier gegeben, so kann man Gleichung (1) dazu benutzen, um den fünften (noch unbekannten) Funktionswert zu bestimmen. Etwa

$$0{,}4 = 4.19{,}4 - 6.69{,}4 + 4.164{,}2 - 317{,}6 \qquad (5)$$
$$317{,}6 = 4.164{,}2 - 6.69{,}4 + 4.19{,}4 - 0{,}4 \qquad (6)$$

In Gleichung (5) ist der Wert 0,4 aus den vier folgenden ermittelt, in Gleichung (6) der Wert 317,6 aus den vier vorhergehenden.

Sind y_1; y_2; y_3; y_4 gegeben, so vermag man durch wiederholte Anwendung des durch Gleichung (6) dargestellten Verfahrens, welches jeweils zum nächsten Wert führt, nacheinander y_5; y_6; y_7 usw. zu finden. Sind jedoch y_{10}; y_9; y_8; y_7 gegeben, so vermag man durch wiederholte Anwendung der Gleichung (5) nacheinander y_6; y_5; y_4 und jeden weiteren vorhergehenden Funktionswert zu finden. Man bekommt schließlich wieder die Wertetabelle.

Die Tatsache, daß analog zu Gleichung (1) bis (4) jeweils höhere Differenzen gleich 0 sind, läßt sich stets dazu benutzen, Folgen von Funktionswerten zu errechnen. Allgemein wird man jedoch bei allen Methoden alsbald nach Möglichkeiten Ausschau halten, um die erhaltenen Resultate zu kontrollieren.

Was die Kontrolle anbelangt, so bedeutet die Bildung höherer Differenzen eine sehr große Zeitersparnis. Beispielsweise habe man nach irgendeiner Methode für die Funktion 5. Grades

$$y = 3x^5 - 0{,}7x^4 - 2{,}3x^3 - 1{,}7x^2 + 2{,}2x + 1{,}4$$

die Wertetabelle

$x_1 = 2$;	$y_1 = 65{,}4$	$x_5 = 6$;	$y_5 = 21877{,}4$
$x_2 = 3$;	$y_2 = 602{,}9$	$x_6 = 7$;	$y_6 = 47884{,}9$
$x_3 = 4$;	$y_3 = 2728{,}6$	$x_7 = 8$;	$y_7 = 94169{,}4$
$x_4 = 5$;	$y_4 = 8619{,}9$		

gefunden.

Man kann dann sieben Resultate (hier y_1 bis y_7) mit einer einzigen Gleichung kontrollieren. Denn die sechste Differenz

$$y_1 - 6y_2 + 15y_3 - 20y_4 + 15y_5 - 6y_6 + y_7$$

muß gleich 0 sein, da es sich um eine Funktion 5.Grades handelt. Der Rechenvorteil besteht darin, daß sich alle Zweitrechnungen erübrigen, die sonst zur Fehlerausschaltung unvermeidlich sind.

Bei der Durchführung der Aufgabe, die Differenz

$$y_1 - 6y_2 + 15y_3 - 20y_4 + 15y_5 - 6y_6 + y_7$$

zu bilden, ist es am zweckmäßigsten, die y-Werte in E einzustellen und dann +1; -6; -20; +5; -6; +1 Kurbelumdrehungen zu machen. Dieses Verfahren hat den Vorteil, daß dann, wenn keinerlei Zwischenlöschungen von Z erfolgen, nacheinander

$$z_1 = 1$$
$$z_2 = 1 - 6 = -5$$
$$z_3 = 1 - 6 + 15 = +10$$
$$z_4 = 1 - 6 + 15 - 20 = 10$$
$$z_5 = 1 - 6 + 15 - 20 + 15 = +5$$
$$z_6 = 1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 = -1$$
$$z_7 = 1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 = 0$$

erscheinen. Dabei entspricht die Zahlenfolge 1; -5; +10; -10; +5; -1 einer Querreihe des Pascalschen Dreiecks und ist bei häufiger Anwendung sehr geläufig.

Nach diesem Verfahren, nämlich jeweils soviel Kurbeldrehungen durchzuführen, wie den Beizahlen entspricht, und dabei die Zwischenlöschungen von Z zu unterlassen, gewinnt der Maschinenrechner alsbald einen klaren Überblick und ist bald in der Lage, alle Rechenfehler zu vermeiden.

Entsprechendes gilt für alle übrigen Differenzausdrücke.

GLEICHUNGEN MIT EINER UNBEKANNTEN

4,1 Regeldetri-Aufgaben

Für die folgende einfache Methode ist es wichtig, zwei Gruppen von Regeldetri-Aufgaben zu unterscheiden, nämlich 1) die der Proportionalität und 2) die der umgekehrten Proportionalität. Die Unterscheidung der beiden Gruppen ergibt sich aus den Beispielen, die hier aufgeführt sind.

4,11 Gruppe der Proportionalität

Beispiel: 12 g Kohlenstoff (c) geben bei Verbrennung 44 g Kohlendioxyd (a),
16,2 g " (b) " wieviel g Kohlendioxyd?

Man bringt den Schlitten auf S8, stellt c = 12(10) und a = 44(0) in E ein und macht eine +Drehung. Es erscheinen 12(17) und 44(7) in R; durch Kommata 17 und 7 Stellen in R abtrennen. Nach einer weiteren +Drehung liest man aus R ab, daß 24(17) g Kohlenstoff bei Verbrennung 88(7) g Kohlendioxyd geben. Da diese Aussage richtig ist, handelt es sich um eine Aufgabe vom Typ 1), Gruppe der Proportionalität. Man kurbelt jetzt, bis b = 16,2(17) in R erscheint, und liest gleichfalls aus R das Endergebnis ab:

16,2(17) g Kohlenstoff geben 59,4(7) g Kohlendioxyd.

Schematische Darstellung:

0,0 "($b/_c$)"	
c ...	a
0,0 !b! ...	"x"

S9

0,0	"(13,5)"	(7)	
12 ...	44	(10)	(0)
0,0 !16,2! ...	"59,4"	(17)	(7)

4,12 Gruppe der umgekehrten Proportionalität

Die Kommata in E und R können beibehalten werden. Aufgabe:

3 Arbeiter (c = f) brauchen 10 Tage (c = g), um einen Graben auszuheben,
5 Arbeiter (c = h) brauchen wieviel Tage?

Würde man entsprechend dem Ansatz "3 Arbeiter brauchen 10 Tage" f = 3(10) und g = 10(0) in E einstellen, so erschienen nach zwei +Drehungen in S8 in R r_l = 6(17) und r_r = 20(7) und führten zu der Aussage "6 Arbeiter brauchen 20 Tage", die falsch ist, da 6 Arbeiter nur 5 Tage brauchen. Daher handelt es sich hier um Typ 2), Gruppe der umgekehrten Proportionalität. In der zweiten Zeile des Ansatzes ist die Zahl der Arbeiter zu h = 5 angegeben und bekannt, während die Zahl der Tage unbekannt ist. Man vertauscht jetzt die bekannten Zahlen der Arbeiter f = 3 und h = 5 und hat das Schema f = 3(10) in E durch h = 5(10) ersetzt; R löschen. Kurbeln, bis durch e = 5(10) = h die Zahl r = 3(17) = f (statt 5(17) = h) erzeugt ist. Das ist der Fall nach sechs + Drehungen in S7. Es ist jetzt

e_l = 5(10) = h $\qquad$ e_r = 10(0) = g
r_l = 3(17) = f $\qquad$ r_r = 6(7) = x

Das Endergebnis wird diagonal abgelesen:

3 Arbeiter brauchen 10 Tage,
5 Arbeiter brauchen 6 Tage.

Schematische Darstellung:

"f/h"	
h ...	g
0,0 !f! ...	"x"

S6

0,0	"0,6"	(7)	
5,0 ...	10	(10)	(0)
0,0 !3,0! ...	"6,0"	(17)	(7)

4,2 Quadratische Gleichungen

Analog zum Töplerverfahren lassen sich quadratische Gleichungen mit Hilfe der BRUNSVIGA 20 in einem Rechnungsgang lösen, sofern sie in der Normalform

(1) $\qquad x^2 + mx + n = 0$

vorliegen und die Buchstaben m und n zahlenmäßig bekannt sind. Dieser Gedanke ist vom Verfasser Ende 1948 ausgearbeitet und zu einem Verfahren entwickelt worden. Ein ähnliches Verfahren wurde zu gleicher Zeit und unabhängig von Herrn W. Faber entwickelt. Es ist in der Zeitschrift "Vermessungstechnische Rundschau, Zeitschrift für Vermessungswesen", 11. Jahrgang, Heft 9, Oktober 1949, Seite 129 bis 132 veröffentlicht.

Bei dem hier beschriebenen Verfahren werden die Operationen so geleitet, daß das R-Werk stets

(2) $\qquad r = z^2 + mz + n$

zeigt.

Wenn nach einigem Suchen angenähert

(3) $r = 0$

erreicht ist, gilt wegen Gleichung (2) und (3) angenähert

(4) $z^2 + mz + n = 0$

oder wegen Gleichung (1) und (4)

(5) $x_1 = z$,

d.h. x_1, die erste Wurzel der Gleichung, erscheint in Z.

Die Forderung (2) ist erfüllt, wenn man

1) vor Inangriffnahme der Aufgabe in R die Konstante n einstellt und
2) jedesmal vor Ausführung vor Δz +Drehungen

(6) $e = 2z + m + \Delta z$

im Einstellwerk einstellt. Dabei ist Δz beliebig wählbar.*)

Wegen gewisser Schwierigkeiten, die dann auftreten, wenn die Summe $2z + m + \Delta z$ negativ ist, ist es empfehlenswert, stets mit einer Hilfseins zu arbeiten, wie am besten durch das Zahlenbeispiel

(7) $x^2 + 12{,}1x - 95043{,}12 = 0$

erläutert wird.

Zwecks Lösung von Gleichung (7) den Absolutbetrag

$/n/ = 95043{,}12(4)$ in E einstellen.

Eine -Drehung in S4. In R erscheint die Ergänzungszahl 9 999 999 904 956,88(7), die n = - 95043,12(7) darstellt. Entsprechend der in Abschnitt 1,4 erwähnten Vorzeichenregel ist es nämlich vorteilhaft, so zu arbeiten, daß in R negative Werte durch Ergänzungszahlen charakterisiert werden. E und Z löschen, m = 12,1(4) in E einstellen. Nach Kommaregel in Z 7 - 4 = 3 Stellen abtrennen. Eine Hilfseins einstellen. (Irgendeinen Hebel, etwa Hebel 12, auf 1 stellen. Darauf folgt ein weiteres, 11 Stellen abtrennendes Komma, welches der Hilfseins den Wert 1,0(11) gibt. Nach Kommaregel in R ein weiteres Komma einstellen, das 11 + 3 = 14 Stellen abtrennt.)

Obwohl Δz theoretisch beliebig gewählt werden darf, wird man wie beim Töplerverfahren Δz gleich 100; 10; 1; 0,1; 0,01 oder einer sonstigen Zehnerpotenz machen, weil man sich beim Einstellen der Hebel Kopfrechnen spart. Wir setzen beim ersten Mal willkürlich $\Delta z = 100$ und müssen zu dem Zweck außer der Hilfseins nach Gleichung (6)

$$2z + m + \Delta z = 112{,}1(4) = 0 + 12{,}1 + 100{,}0$$

in E einstellen und $\Delta z = 100$ (3) +Drehungen (eine +Drehung in S6) machen. Jetzt sind

$z = 100(3)$

$e_l = 1(11)$; $e_r = 112{,}1(4)$;

$r_l = 100(14)$ $r_r = -83\,833{,}12(7)$,

wobei $r_l + r_r$ das Bild 99,9916166,88 ergeben.

---

*) Gleichung (6) geht für m = 0 (und n = 0) über in die auf S4, Gleichung (2) für den Einstellwert $e_1 = 2a+b$ angegebene Gleichung mit $a = z$ und $b = \Delta z$.

Nach Gleichung (2) sind z und r_r durch die Beziehung
$-83\,833{,}12 = 100^2 + 12{,}1.100 - 95043{,}12$ verknüpft. D.h., wenn in Gleichung (7) x gleich 100 wäre, würde $x^2 + 12{,}1x - 95043{,}12$ nicht gleich Null, sondern gleich -83 833,12 sein.

Δz wird zwar, wie bereits gesagt, beliebig gewählt. Wir wollen es aber wie beim Töplerverfahren nach und nach kleiner werden lassen und, nachdem wir nach Gutdünken mit $\Delta z = 100$ anfingen, mit $\Delta z = 10$; 1; 0,1 usw. fortfahren, bis schließlich das Ziel, r_r gleich 0 werden zu lassen, möglichst weitgehend erreicht ist:

$\Delta z = 100$; Hebel 7 auf "3"; eine +Drehung.
$\Delta z = 100$; Hebel 7 auf "5"; eine +Drehung.
$\Delta z = 100$; Hebel 7 auf "7"; eine +Drehung.

Bei der letzten +Drehung ist die Neunerbrücke von R16 bis R13 verschwunden und hat einer Reihe von Nullen Platz gemacht. Es ist also r_r positiv geworden Wegen dieses Vorzeichenwechsels von r_r wählen wir nacheinander $\Delta z = -100$ und $\Delta z = +10$:

$\Delta z = -100$; In Gleichung (6) würde 2z + m auf 812,1 und die Hinzufügung von $\Delta z = -100$ wieder auf den bereits eingestellten Wert 712,1 führen; also ohne Umstellung: eine -Drehung.
$\Delta z = +10$; Hebel 7 auf "6"; (das letzte $\Delta z = -100$) Hebel 6 auf "2"; Schlitten in S5; eine +Drehung.

r_r ist bei der letzten Kurbeldrehung wieder positiv geworden, daher $\Delta z = -10$ und dann gleich + 1 setzen.

$\Delta z = -10$; eine -Drehung
$\Delta z = +1$; Hebel 6 auf "1";
Hebel 5 auf "3"; Schlitten in S4; dann eine +Drehung.
$\Delta z = 1$; Hebel 5 auf "5"; eine +Drehung.
$\Delta z = 1$; Hebel 5 auf "7"; eine +Drehung.

Weil bei der letzten +Drehung r_r positiv wurde, Δz gleich - 1 und dann gleich + 0,1 setzen:

$\Delta z = -1$; eine -Drehung
$\Delta z = +0{,}1$; Hebel 5 auf "6";
Hebel 4 auf "2"; Schlitten in S3, dann eine +Drehung.
$\Delta z = 0{,}1$; Hebel 4 auf "4"; eine +Drehung.
$\Delta z = 0{,}1$; Hebel 4 auf "6"; eine +Drehung.

In der jetzt erreichten Einstellung

$z = 302{,}3(3)$;
$e_l = 1(11)$ $\qquad e_r = 616{,}6(4)$;
$r_l = 302{,}3(14)$ $\qquad r_r = 0$

ist r_r, wie gewünscht, gleich 0. Nach Gleichung (2) gilt

$$302{,}3^2 + 12{,}1.302{,}3 - 95043{,}12 = 0,$$

weshalb die erste Wurzel der Gleichung (7)

$$x_1 = 302{,}3$$

ist. x_2, die zweite Wurzel der Gleichung (7), läßt sich leicht finden. Man füge das letzte Δz, das gleich 0,1 war, zum letzten e_r hinzu und ziehe diese Summe von r_l ab. Man erhält so

$$x_2 = 302{,}3 - (616{,}6 + 0{,}1) = -314{,}4.$$

Dies läßt sich, wie folgt begründen: Da zu Beginn der Aufgabe $e_r = m$ eingestellt wurde, ist während des ganzen Rechenganges nach Hinzufügung des letzten Δz in E_r stets (2_z+m) eingestellt.

Da nunmehr $z = x_1$ ist, gilt:

(8) $e_r = 2x_1 + m.$

Andererseits gilt nach dem Vietaschen Wurzelsatz

(9) $x_1 + x_2 = - m$

Nach Eliminierung von m folgt aus Gleichung (8) und (9)

(10) $x_2 = x_1 - e_r.$

$x_2 = -314,4$ ist auch mit der Maschine leicht zu bekommen, wenn zwecks Addition des letzten Δz zu e_r Hebel 4 auf "7" gestellt wird und zwecks Bildung der Differenz $x_1 - (\Delta z + e_r)$ eine -Drehung in S11 erfolgt. Dann erscheint die Ergänzungszahl 999 685,6(14) in R, die $x_2 = -314,4$ darstellt.

Um 999 685,6(14) in die dekadische Ergänzung 314,4(14) umzuwandeln, kann man 999 685,6(14) durch die Rückübertragungsvorrichtung in S11 nach E bringen, um nach einer -Drehung

$-x_2 = 314,4(14)$

zu erhalten. Das ist gleichbedeutend mit

$x_2 = - 314,4(14).$

Die Kontrolle der beiden Ergebnisse für x_1 und x_2 ist sehr leicht nach dem Vieta'schen Wurzelsatz durchführbar, da nach diesem das Produkt

(11) $x_1 \cdot x_2 = n$

oder im vorliegenden Beispiel

$302,3 \cdot (-314,4) = - 95043,12$

ist.

Unter Beachtung von Gleichung (6) läßt sich, wenn stets mit einer Hilfseins gearbeitet wird, jede quadratische Gleichung lösen, die reelle Wurzeln hat. Es ist nur die Frage der Vorzeichen zu klären, am besten wie in Abschnitt 1,4, woraus sich vier Regeln ableiten lassen:

1) Einem positiven Δz entsprechen positive, einem negativen Δz negative Kurbelumdrehungen.
2) Sofern man sorgfältig das Auftreten von dekadischen Ergänzungen in Z vermeidet, d.h. sofern nach Löschung von Z der Drehsinn der ersten Kurbelumdrehung richtig gewählt wird, bedeuten weiße Zahlen in Z positive, rote Zahlen negative Werte.
3) In E_r ist jeweils die Summe von e_l und e_r einzustellen. Beispielsweise ergeben die Hilfseins $e_l = 1(11)$ und $e_r = 2z + m + \Delta z = - 27(4)$ insgesamt das Bild 0,9999973,0000 in E.
4) In R erscheint die Summe von r_l und r_r. So geben die Werte $r_l = - 32(15)$ und $r_r = - 11,3(4)$ das Bild 99967,9999999988,7000 in R.

Schematische Darstellung:

I. Einstellen der Beiwerte

Einstellen von n = - 95043,12

	0,0 !1! rot	(3)	
	95043,12	(4)	-Dreh.
S6	0,0 "9999999904956,88"	(7)	

II. Ausrechnung:

Im Beispiel sind die Rechengänge, die Nulldurchgänge hervorrufen und daher sofort wieder zurückgenommen werden, fortgelassen.

1)

z_1=0,0 ! z_2=Δz_1!
1,0 ...e_1=0,0+m+Δz_1
r_1="z_2"...!r_2=$z_2{}^2$+m·z_2+n!

2)

z_2 "z_3=z_2+Δz_2"
1,0...e_2=2z_2+m+Δz_2
z_2...r_2 !"z_3"...!r_3=$z_3{}^2$+m·z_3+n!

u.s.f. bis

i)

z_i "z_i+Δz_i = x_1"
1,0...e_i = 2z_i+m+Δz_i
x_1... r_i=$z_i{}^2$+m·z_i+n !≈0,0!

1) Δz_1 bis Δz_3 = + 100

	0,0	"100,0"	(3)
	1,0...112,1(=12,1+100)		(11)(4)
S6	=	!99,9916166,88	(14)(7)

2)

	100,0	"200,0"	(3)
	1,0...312,1(=200+12,1+100)		(11)(4)
S6	=	!199,9947376,88!	(14)(7)

3)

	200,0	"300,0"	(3)
	1,0...512,1(=400+12,1+100)		(11)(4)
S6	=	!299,9998586,88!	(14)(7)

4) Δz_4 bis Δz_5 = + 1,0

	300,0	"301,0"	(3)
	1,0...613,1(=600+12,1+1)		(11)(4)
S4	=	!300,9999199,98!	(14)(7)

5)

	301,0	"302,0"	(3)
	1,0...615,1(=602+12,1+1)		(11)(4)
S4	=	!301,9999815,08!	(14)(7)

6) Δz_6 bis Δz_8 = + 0,1

	302,0	"302,1"	(3)
	1,0...616,2(=604,0+12,1+0,1)		(11)(4)
S3	=	!302,0999876,70!	(14)(7)

7)

	302,1	"302,2"	(3)
	1,0...616,4(=604,2+12,1+0,1)		(11)(4)
S3	=	!302,1999938,34!	(14)(7)

8)

	302,2	"302,3"	(3)
	1,0...616,6(=604,4+12,1+0,1)		(11)(4)
S3	=	!302,300 0000,00!	(14)(7)

III. 1) Errechnen von x_2

!-1,0!
2x_1+m=2z_i+m+2Δz_i
x_1 "x_2"

-Dreh.

	0,0	!1,0! rot	(10)
	0,0...616,7(=604,4+12,1+0,2)		(4)
S11	302,3	"999 685,6"	(14)

-Dreh.

2) Umwandeln eines negativen x_2 in die absolute Zahl

	0,0	!1,0! rot	(10)
	/999,6856/		(4)
S11	/0,0/	"-x_2 = 314,4"	(14)

-Dreh.

-/23

3 Gleichungen höheren Grades und transzendente Gleichungen

31 Interpolationsmethode

Die an sich recht einfache Interpolationsmethode verlangt etwas Geschicklichkeit, sobald es sich darum handelt, auf schnellem Wege zu Ergebnissen zu kommen und Umwege zu vermeiden. An einem Beispiel $x^3 + bx^2 = c$ mit $b = 3$ und $c = 5$, also

(1) $\qquad x^3 + 3x^2 = 5$

wird gezeigt, wie das Ziel der schnellen Berechnung zu erreichen ist.

Im Falle $x_1 = 1$ wäre die Funktion $x_1{}^3 + 3x_1{}^2$, die kurz mit y_1 bezeichnet werde, gleich +4.

Im Falle $x_2 = 2$ wäre $y_2 = x_2{}^3 + 3x_2{}^2 = + 20$. Demnach wird eine Lösung der Gleichung etwa bei $x_3 = 1,1$ liegen. Man macht mit $x_3 = 1,1$ eine Probe: Kommata nach Belieben. 3; 6; 3+6 = 9 Stellen in Z; E; R abtrennen. Probewert $x_3 = 1,1(6)$ in E einstellen. Mit $z = 1,0(3)$ multiplizieren, E löschen.

$b = 3,0(6)$ in E einstellen. Das 1(3)-fache von e zu r addieren, (eine +Drehung in S4). Es ist $r = x_3 + 3 = 4,1(9)$.

Nach Rückübertragung in S4 (Stellenzeiger über den Einern in Z) wird $e = 4,1(6)$. Mit $x_3 = z = 1,1(3)$ multiplizieren, dann ist $r = 4,51(9) = x_3{}^2 + 3x_3$. Nach Rückübertragung in S4 wird $e = 4,51(6)$. Mit $x_3 = z = 1,1(3)$ multiplizieren. In R erscheint $x_3{}^3 + 3x_3{}^2 = 4,961(9) = y_3$.

Der Lösung $y = 5$ kommen am nächsten $y_3 = 4,961$ und $y_1 = 4$. Ihnen wird $x_3 = 1,1$ und $x_1 = 1$ zugeordnet:

(2) $\qquad x_1 = 1 \quad ; \qquad\qquad y_1 = 4 \quad ;$

(3) $\qquad x_3 = 1,1; \qquad\qquad y_3 = 4,961.$

Hieraus folgen die Differenzen $\Delta x_{31} = x_3 - x_1$ und $\Delta y_{31} = y_3 - y_1$:

(4) $\qquad x_3 - x_1 = 0,1; \qquad\qquad y_3 - y_1 = 0,961$

Kommata neu einstellen und im Zählwerk 6 Stellen, im Einstellwerk 12 bzw. 3 Stellen, im Resultatwerk 12 + 6 = 18 bzw. 3 + 6 = 9 Stellen abtrennen.

Indem die linke Seite von E und R für x-Koordinaten, die rechte für y-Koordinaten benutzt wird, nach Löschung von E die Koordinaten eines der Wertepaare nach Gleichung (2) oder (3) in R und die Differenzen nach Gleichung (4) in E einstellen:

$$e_l = 0,1(12) = x_3 - x_1; \qquad e_r = 0,961(3) = y_3 - y_1;$$
$$r_l = 1,1(18) = x_3; \qquad r_r = 4,961(9) = y_3.$$

e_r, r_l, r_r sind, wie in Abschnitt 1,4 beschrieben, als Ergänzungszahlen darzustellen, wenn sie negativ sind. Falls e_l negativ ist, darf es nicht als Ergänzungszahl dargestellt werden. Diese Forderung läßt sich erfüllen, wenn man gegebenenfalls in E $x_1 - x_3$ und $y_1 - y_3$ anstelle von $x_3 - x_1$ und $y_3 - y_1$ einstellt.

Nach beliebigen Kurbelumdrehungen müssen jetzt R_l und R_r stets x- und y-Koordinaten von Punkten zeigen, die auf der Verbindungsgeraden $P_1(x_1;\ y_1)$ --- $P_3(x_3;\ y_3)$ liegen. So erscheinen nach einer in S7 ausgeführten -Drehung x_1 und y_1 in R_l und R_r, was eine Kontrolle ermöglicht.

Man versucht nunmehr, auf der Verbindungsgeraden P_1P_3 einen Punkt zu finden, dessen y-Wert gleich 5 ist. Indessen hat allzugroße Genauigkeit nicht viel Zweck, da die Funktion im Bereich P_1P_3 in Wahrheit etwas von der maschinell dargestellten Geraden P_1P_3 abweicht. Es genügt als Faustregel, daß die Zahl der fehlerfreien Stellen von x sich bei jeder neuen Interpolation fast verdoppelt. Der genaueste Wert für x war x_3 mit 2 Ziffern, nach der Faustregel ist ein x mit 4 Ziffern zu suchen.

Nach diesen Gesichtspunkten erhält man durch Kurbeln in R_1

$$x_4 = 1{,}104(18),$$

was der Ordinate $r_r = 4{,}999\ 44(9)$ der Verbindungsgeraden P_1P_3 entspricht. Eine Kontrolle nach Formel (1) zeigt, daß bei $x_4 = 1{,}104$ die Funktion $y_4 = 5{,}002\ 020\ 864$ ist. Eine weitere Interpolation zwischen $P_3(x_3;\ y_3)$ und $P_4(x_4;\ y_4)$ würde $x_5 = 1{,}103\ 803$ liefern.

I. Berechnung eines Näherungswertes $y_i = f(x_i)$ für z.B. i = 3

$y_3 = (x_3+b).x_3.x_3$ $\qquad$ $y_3 = (1{,}1+3).1{,}1.1{,}1 = 4{,}961$

1.	0,0 !1,0!		0,0 !1,0!	(3)	
	x_3		1,1	(6)	+Dreh.
	0,0 "x_3"	S4	0,0 "1,1"	(9)	
2.	1,0 !2,0!		1,0 !2,0!	(3)	
	b		3,0	(6)	+Dreh.
	x_3 "x_3+b"	S4	1,1 "4,1"	(9)	
3.	0,0 !x_3!		0,0 !1,1!	(3)	
	/x_3+b/		/4,1/	(6)	+Dreh.
	/0,0/ "(x_3+b).x_3"	S4;3	/0,0/ "4,51"	(9)	
4.	0,0 !x_3!		0,0 !1,1!	(3)	
	/(x_3+b).x_3/		/4,51/	(6)	+Dreh.
	/0,0/ "y_3"	S4;3	/0,0/ "4,961"	(9)	

II. 1) Darstellung der Interpolationsgeraden $P_1(x_1y_1)\ P_3(x_3y_3)$

0,0	(Z)		0,0	(6)	
(x_3-x_1)...(y_3-y_1)	(E)		0,1...0,961	(12) (3)	-Dreh.
x_3...y_3	(R)	S7	1,1...4,961	(18) (9)	

2. 2) Probe der Einstellung

	0,0 !1,0! rot !0,0! rot	(Z)		0,0 !1,0!rot !0,0!	(6)
	(x_3-x_1) ... (y_3-y_1)	(E)	-/+	0,1...0,961	(12)(3)
S [(Z)+1]	= x_1...y_1 "x_3...y_3"	(R)	Dreh S7	="1,0...4,0" "1,1...4,961"	(18)(9)

III. Aufsuchen eines weiteren Näherungswertes $y_4 = f(x_4)$ auf der Interpolationsgeraden:

0,0 ... "x_4-x_3"		0,0 "0,004"	(6)
(x_3-x_1)...(y_3-y_1)		0,1...0,961	(12)(3)
x_3...y_3 "x_4"...!y_4≈C!	S4	1,1...4,961 "1,104"...!4,99944!	(18)(9)

Zur Errechnung eines weiteren Näherungswertes x_5 ist Rechnungsgang I mit $x_4 = 1{,}104$, II und III mit x_3, y_3 und x_4, y_4 zu wiederholen.

-/25

4,32 Die Substitutionsmethode bei Gleichungen höheren Grades

Gleichungen höheren Grades lassen sich mit Hilfe der Substitutionsmethode vorteilhaft lösen.

Gegeben sei die eine Gleichung $x^3 + bx^2 - c = 0$ mit $b = 3$ und $c = 5$:

(1) $x^3 + 3x^2 - 5 = 0$,

in welcher x gesucht ist. Im Falle x = 1 hat die Funktion $y = x^3 + 3x^2 - 5$ den Wert - 1, im Falle x = 2 den Wert + 15. Es wird etwa bei x = 1,1 eine Lösung von (1) zu suchen sein.

Man verwende eine Hilfsunbekannte u, die durch die Gleichung

(2) $x = u + 1{,}1$

definiert ist. Wie aus Gleichung (2) hervorgeht, bedeutet u die Abweichung der Unbekannten x vom roh geschätzten Wert 1,1. Jetzt wird in Gleichung (1) überall x ersetzt durch (u + 1,1); es ist dann

$$
\begin{array}{lrlll}
(3) & x^3 = & u^3 + & 3.1{,}1\ u^2 + & 3.1{,}1^2\ u + 1{,}1^3 \\
 & 3x^2 = & & 3\ u^2 + & 3.2.1{,}1\ u + 3.1{,}1^2 \\
 & -5 = & & & -5 \\
\hline
\end{array}
$$

$$x^3+3x^2-5 = u^3 + (3 \cdot 1{,}1+3)u^2 + (3\cdot 1{,}1^2+6\cdot 1{,}1)u + (1{,}1^3+3 \cdot 1{,}1^2-5) = 0$$

Die in den Klammern stehenden Summen sind bei Anwendung einer Rechenmaschine schnell gefunden:

(4) $u^3 + 6{,}3\ u^2 + 10{,}23\ u - 0{,}039 = 0 = u^3 + f.u^2 + g.u + h$

Wenn u außerordentlich klein ist, werden die Quadrate und Kuben von u so geringfügig, daß sie in Gleichung (4) praktisch ohne Bedeutung sind und daß dort $g.u = h$; $10{,}23u = 0{,}039$ wird. Es ist jedoch zweckmäßig, die sehr geringfügigen Glieder u^3 und $6{,}3u^2$ als Korrekturglieder auf die rechte Seite der Gleichung zu bringen:

(5) $10{,}23\ u_2 = 0{,}039 - 6{,}3\ u_1{}^2 - u_1{}^3$

Ist dann eine erste Annäherung u_1 bekannt, so wird diese auf der rechten Seite von Gleichung (5) eingesetzt und liefert eine wesentlich genauere zweite Annäherung u_2. Oder nach Gleichung (5)

(6) $u_2 = \frac{0{,}039}{10{,}23} - \frac{6{,}3}{10{,}23} u_1{}^2 - \frac{1}{10{,}23} u_1{}^3$

Es sind in Gleichung (6) die drei Quotienten $\frac{0{,}039}{10{,}23}$; $\frac{6{,}3}{10{,}23}$; $\frac{1}{10{,}23}$ zu bestimmen, die den gleichen Divisor 10,23 haben: Zwecks Bildung des Quotienten $\frac{1}{10{,}23}$ Hebel 5 auf "1" stellen; eine -Drehung in S11. Hierauf wird r = 99999(15) und stellt -1(15) dar. E und Z löschen. In E eine Hilfseins 1(9) und 10,23(5) einstellen. Das Komma trennt 15-5 = 10 Stellen in Z ab und 10+9 = 19 Stellen in R.

Nach z = 0,097 751 711(11) +Drehungen erscheint bei $r \approx 0{,}0 \frac{1}{10{,}23}$ = 0,097 751 711(19) in R. Schlitten auf S11 bringen, den Quotienten $\frac{1}{10{,}23}$ nach E rückübertragen und bei beliebiger Kommastellung mit 0,039 bzw. 6,3 multiplizieren. Die Ergebnisse sind

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{10{,}23} = 0{,}097\ 751\ 711;$$

$$\frac{f}{g} = \frac{6{,}3}{10{,}23} = 0{,}615\ 835\ 779;$$

$$\frac{h}{g} = u_1 = \frac{0{,}039}{10{,}23} = 0{,}003\ 812\ 316$$

und geben, in Gleichung (6) eingesetzt,

$$(7) \qquad u_2 = 0{,}003\ 812\ 316 - 0{,}615\ 835\ 779\ u_1^{\,2} - 0{,}097\ 751\ 711\ u_1^{\,3}.$$

Eine aus Gleichung (7) erhaltene erste Annäherung $u_1 = 0{,}003\ 812\ 316$ führt nach Gleichung (7) zu $u_2 = 0{,}003\ 803\ 372$ und nach Gleichung (2) zu

$$x = 1{,}103\ 803\ 37.$$

Man sieht, wie außerordentlich schnell diese Methode hohe Genauigkeit ergibt.

I. Errechnung von $\frac{1}{g} = \frac{1}{10{,}23}$

0,0 !1,0! rot	(10)
⊖ 1,0	(5)
⊖ 1=99999,0	(15)

0,0 "1/g"	0,0 "0,097751711" (10)
1,0... g	1,0... 10,23 (9) (5) +Dr
99999,0 "1/g"...!0,0!	9 9999,0 "0,097751711... !0,000000000461...≈0,0! (19)(15)

II. Errechnung von $h/g = u_1$ und f/g

0,0 !h!	0,0 !0,039! (11)	
/1/g/	/0,097 751711/ (9)	+ Dreh.
/0,0/ "h/g" = u_1	/0,0/ "0,003812316729" (20)	

0,0 !f!	3,9 !6,3! (9)	
1/g	0,097751711 (9)	+ Dreh.
0,0 "f/g"	0,3812316729 "0,6158357793" (18)	

III. Errechnung von $u_2 = u_1 \cdot \left[1 - u_1 \cdot (f/g - 1/g \cdot u_1)\right]$

0,0 !u_1!	0,0 !0,003812317! rot (9)	
⊖ 1/g	⊖ 0,097751711 (9)	- Dreh.
f/g "f/g-1/g.u_1"	0,6158357793 "0,61546311879..." (18)	

0,0 !u_1! rot	0,0 !0,003812317! rot (9)	
⊖ /f/g- u_1/g/	⊖ /0,615463119/ (9)	- Dreh.
/0,0/1,0 "1-u_1.(f/g-u_1/g)"	/0,0/1,0 "0,99765365949..." (18)	

0,0 !u_1!	0,003812317 rot !0,0! rot (9)	
⊕ /1-u_1.(f/g-u_1/g)	⊕ /0,997653659/ (9)	+ Dreh.
/0,0/ "u_2"	/0,0/ "0,003803372..." (18)	

4,33 Die Substitutionsmethode bei transzendenten Gleichungen

Die bereits behandelte Substitutionsmethode läßt sich unmittelbar nur auf Gleichungen höheren Grades anwenden. Transzendente Gleichungen veranlassen oft zum Gebrauch der Differentialrechnung, die auch hier zunächst angewandt wird.

Man denke sich irgendeine transzendente Funktion $F(x)$, in welcher x bei $F(x)=0$ bestimmt werden soll. In der Nähe der Lösung sei ein Punkt

$$x_0 = 1,1 \;;$$
$$F(x_0) = -0,039$$

bekannt mitsamt den Ableitungen

$$F'(x_0) = 10,23 \;;$$
(2) $$F''(x_0) = 12,6 \;;$$
$$F'''(x_0) = 6 \;.$$

Wenn nun

(3) $$dx = x - x_0$$

eingeführt wird, ist entsprechend der Mac-Laurinschen Reihe

(4) $$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)dx + \frac{1}{2}F''(x_0)dx^2 + \frac{1}{6}F'''(x_0)dx^3 + \ldots$$

oder in Zahlen

(5) $$F(x) = -0,039 + 10,23\,dx + 6,3\,dx^2 + dx^3 + \ldots .$$

Da Gleichung (4) und (5) mit der 3. Potenz von dx abgebrochen sind, geben sie den Verlauf der Kurve umso genauer an, je kleiner dx ist, d.h. je näher x_0 an das gesuchte x heranrückt.

Ist nun in Gleichung (5), wie bereits anfangs gefordert, $F(x)$ gleich 0, dann entspricht Gleichung (5) vollkommen der Gleichung (4) des Abschnittes 4,32 und wird ebenso behandelt wie diese. Auch transzendente Gleichungen lassen sich also grundsätzlich nach der Substitutionsmethode lösen.

Falls Gleichung (5) mehrere Lösungen hat, so ist natürlich nur eine Lösung mit sehr kleinem dx brauchbar, da dann Glieder mit 4. und höheren Potenzen von dx vernachlässigt werden dürfen.

4,34 Das Newtonsche Näherungsverfahren

Beim Kapitel 4,31 über die Interpolationsmethode wurde in E und R

$$e_l = x_3 - x_1 \;; \qquad e_r = y_3 - y_1 \;;$$
$$r_l = x_3 \;; \qquad r_r = y_3$$

eingestellt. Diese Methode läßt sich insofern variieren, als man ebensogut

$$K.(x_3 - x_1) \text{ statt } x_3 - x_1 \text{ in } E_l \;;$$
$$K.(y_3 - y_1) \text{ statt } y_3 - y_1 \text{ in } E_r$$

einstellen darf, wobei K beliebig ist. In R_l und R_r müssen auch nach dieser Abänderung stets Koordinaten der gleichen Geraden P_1P_3 erscheinen, wenn irgendwelche Kurbeldrehungen ausgeführt werden. Das Verfahren, durch Kurbeldrehungen in R_r einen gegebenen Wert zu erzeugen, um auf diese Weise in R_l einen gesuchten zu finden, läßt sich daher nach Multiplikation mit K unverändert beibehalten.

Wir wählen $K = \frac{1}{x_3 - x_1}$ und haben

$$e_l = 1 \;; \qquad e_r = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{\Delta y_{31}}{\Delta x_{31}} \;.$$

Wenn P_3 und P_1 sehr nahe zusammenrücken, wird aus dem Differenzenquotienten $\frac{\Delta y_{31}}{\Delta x_{31}}$ der Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = y'$. Die Interpolationsmethode geht dann, wie nicht näher diskutiert werden soll, in das Newtonsche Näherungsverfahren über. Hierzu ein Beispiel:

Es liege die Gleichung $x^3 + bx^2 = c$ mit $b = 3$ und $c = 5$, also

(2) $\quad x^3 + 3x^2 = 5$

vor. Man denkt sich am besten eine Funktion

(3) $\quad y = x^3 + 3x^2$

mit dem Differentialquotienten

(4) $\quad y' = 3x^2 + 6x$

und sucht ein x, bei welchem y = 5 ist. Etwa bei x = 1,1 ist das angenähert der Fall:

$$x_1 = 1{,}1 \;; \qquad y_1 = 4{,}961 \;;$$
$$y_1' = 3x_1^2 + 6x_1 = 10{,}23 \;.$$

Die vorteilhafteste Berechnung von Funktionen wie $x_1^3+3x_1^2$ oder $3x_1^2+6x_1$ wurde in Abschnitt 3 dargestellt.

Durch Kommata willkürlich 5 Stellen in Z; ferner 11 und 2 Stellen in E; schließlich 5+11 = 16 und 5+2 = 7 Stellen in R abtrennen. In E und R

$$e_l = 1(11) \;; \qquad e_r = y_1' = 10{,}23(2) \;;$$
$$r_l = x_1 = 1{,}1(16) \;; \qquad r_r = y_1 = 4{,}961(7)$$

einstellen. Falls e_r; r_l oder r_r negativ sind, werden sie gemäß Abschnitt 1,4 als dekadische Ergänzungen eingestellt.

Man versucht nunmehr, auf der Tangente einen Punkt zu finden, dessen y-Wert gleich 5 ist. Zu diesem Zweck kurbelt man, bis $r_r = 5(7)$ erreicht ist. Wie bei der Interpolationsmethode ist jedoch allzugroße Genauigkeit nicht sinnvoll, da die Funktion y von der maschinell dargestellten Tangente abweicht. Die Faustregel, daß die Zahl der fehlerfreien Stellen von x sich bei Anwendung des Newtonschen Näherungsverfahrens verdoppelt, gibt einen ungefähren Anhaltspunkt. x_1 hatte zwei Stellen, man erzeuge daher in R_r ein x mit vier Stellen und hat so nach 0,004(5) +Drehungen

$$x_2 = 1{,}104(16),$$

was der Ordinate $r_r = 5{,}00192(7)$ der Tangente entspricht.

Bei $x_2 = 1{,}104$ ist die Ordinate der Kurve $y_2 = x_2^3 + 3x_2^2 = 5{,}002\ 020\ 864$, wie die Nachrechnung ergibt. Wegen der 0 in der zweiten Stelle hinter dem Komma kann x_1 hier auch als dreistellig betrachtet werden, womit etwa eine weitere Stelle als gültig angesehen werden kann:

$$x_3 = 1{,}1038 \qquad r_r = 4{,}999874 \qquad y_2 = 4{,}99\ 965\ 027$$

gegeben: $x^3 + b.x^2 = c$	$x^3 + 3x^2 = 5$
Funktion: $x^3 + b.x^2 = y$	$x^3 + 3x^2 = y$
1. Näherung: x_1	$x_1 = 1{,}1$
mit $y_1 = x_1^3 + b.x_1^2$	$y_1 = 1{,}1^3 + 3.1{,}1^2 = 4{,}961$
1. Ableitung: $3x^2 + 2bx = y'$	$3x^2 + 6x = y'$; $y_1' = 10{,}23$

Darstellen der Tangente im Punkt 1 und Errechnen einer ersten Annäherung:

0,0 ("$x_2 - x_1$")	
1,0 ... y_1'	
x_1 ... y_1 "x_2" ... !≈ c!	

0,0	"0,004"	(5)
1,0 ...	10,23	(11)(2)
1,1 ... "1,104" ...	4,961 !5,00192!	 (16)(7)

...weiteren Annäherung:

0,004	"0,0038"	(5)
1,0 ...	10,23	(11)(2)
1,104 ...	5,00192	
1,1038 ...	!4,999 874!	(16)(7)

oder auch (wegen e_1 = 1,0) x in Z statt in R_1 gebildet:

x_1	"x_2"
y_1	
y_1	! ≈ c!

1,1	"1,1038"	(5)
10,23		(2)
4,961	!4,999 874!	(7)

5. GLEICHUNGEN MIT ZWEI UND MEHR UNBEKANNTEN

5,1 Lineare Gleichungssysteme

Die in der Praxis sehr häufigen linearen Gleichungssysteme sind mit Hilfe der BRUNSVIGA 20 auf zahlreiche Arten zu lösen. Auf die vielen Möglichkeiten in allen Einzelheiten einzugehen, erscheint schon aus Platzgründen nicht ratsam. Es dürfte die Darstellung eines Verfahrens genügen, das sich durch Übersichtlichkeit auszeichnet.

Liegt ein System von n Gleichungen mit n Unbekannten vor, so kann die Aufgabe, die Unbekannten zu ermitteln, als gelöst betrachtet werden, wenn es gelingt, das System in ein System von (n-1) Gleichungen mit (n-1) Unbekannten umzuwandeln. Nach wiederholter Anwendung dieses Verfahrens, die Zahl der Gleichungen und Unbekannten um 1 zu verringern, ergeben sich, wie bekannt, die Lösungen.

Wir wollen im einfachsten Fall der zwei Gleichungen

(1) $a_1x + a_2y + a_3 = 0$

(2) $b_1x + b_2y + b_3 = 0$

mit den zwei Unbekannten x und y die Verringerung der Unbekannten in der Weise durchführen, daß wir etwa x eliminieren und zu dem Zweck die mit $\frac{b_1}{a_1}$ multiplizierte Gleichung (1) von Gleichung (2) abziehen. Das gibt

(3) $b_1x+b_2y+b_3 - \frac{b_1}{a_1}(a_1x+a_2y+a_3) = 0$

oder kürzer

(4) $(b_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2)y + (b_3 - \frac{b_1}{a_1} a_3) = 0.$

x ist eliminiert, das System (1); (2) in das System (4) umgewandelt.

Zur Erläuterung der hieraus folgenden Rechenvorschrift dient das Zahlenbeispiel

(5) $27x + 59y - 18 = 0;$
(6) $19x - 37y + 81 = 0,$

in welchem zwecks Eliminierung von x die mit dem Faktor $\frac{19}{27}$ = 0,703 703 7 multiplizierte Gleichung (5) von Gleichung (6) subtrahiert wird:

Durch beliebig gewählte Kommata 7; 7; 7+7 = 14 Stellen in Z; E und R abtrennen. Faktor 0,703 703 7(7) in E einstellen. 19(14) in R einstellen und 27(7) -Drehungen durchführen. In R erscheint 0,000 000 1(14). Z und R löschen. -37(14) in Form von 963(14) in R einstellen und 59(7) -Drehungen durchführen. In R erscheint die Ergänzungszahl 921,481 481 7(14). Z und R löschen. 81(14) in R einstellen und -18(7) -Drehungen (gleich 18(7) +Drehungen) durchführen. In R erscheint 93,666 666 6(14).

Hieraus folgt streng

(7) $0{,}000\,000\,1\,x + (921{,}481\,481\,7 - 1000)y + 93{,}666\,666\,6 = 0$

oder, da die Beizahl von x fast gleich 0 ist, angenähert

(8) $(921{,}481\,481\,7 - 1\,000)y + 93{,}666\,666\,6 = 0.$

Gleichung (5) und (6) sind unter Eliminierung von x zu Gleichung (8) zusammengefaßt. Infolge Gleichung (8) ist

(9) $$y = -\frac{93{,}666\,666\,6}{921{,}481\,481\,7 - 1\,000} = \frac{93{,}666\,666\,6}{78{,}518\,518\,3}$$

Die Division ist auf zweierlei Weise durchführbar. Erstens baut e = 78,518 518 3(7) nach 1,192 924 5(7) - Drehungen r = 93,666 666 6(14) nahezu auf 0 ab.

Zweitens baut e = 9 921,481 481 7(7) nach 1,192 924 5(7) +Drehungen r = 93,666 666 6(14) nahezu auf 0 ab.

Die zweite Methode hat den Vorteil, daß die Berechnung von 78,518 518 3 aus der Ergänzungszahl 921,481 481 7 fortfällt.

Das fortwährende Umrechnen der dekadischen Ergänzungen bedeutet einerseits eine zusätzliche Rechenarbeit, andererseits verursacht es leicht Recherfehler. Es ist daher hier entgegen den in Abschnitt 1,4 festgelegten Regeln ratsam, gegebenenfalls auch im Zählwerk mit Ergänzungszahlen zu arbeiten, wenn dann das Umrechnen derselben fortfällt. So lassen sich [99,27(5)-100(5)] +Drehungen durch Löschen von Z, eine positive und eine negative Kurbeldrehung sowie 7 -Drehungen in S5 und 3 -Drehungen in S4 ausführen.

Oder es lassen sich [99,27(5)-100(5)] -Drehungen durch Löschen von Z, eine negative und eine positive Kurbeldrehung sowie 7 +Drehungen in S5 und 3 +Drehungen in S4 ausführen. Im ersten Fall erscheint 999 999,27(5) in weißen Ziffern, im zweiten Falle in roten.*)

Da trotz großer Sorgfalt gelegentlich Rechenfehler auftreten, spielen im Falle größerer Gleichungssysteme Zwischenkontrollen eine große Rolle. Es wurde im Beispiel die mit $\frac{19}{27}$ multiplizierte Gleichung (5) von Gleichung (6) abgezogen und lieferte Gleichung (8). Deshalb muß die Beziehung

$$-\frac{19}{27}(27+59-18) + (19-37+81) = 921{,}4814817-1000 + 93{,}6666666$$

erfüllt sein.

I. Errechnen des Erweiterungsfaktors $\frac{b_1}{a_1} = \frac{19}{27}$

0,0 "b_1/a_1"	0,0 "0,7037037"		(7)	
1,0 ... a_1	1,0 ... 27,0	(10)	(0)	+Dreh.
0,0 "b_1/a_1"...!b_1!	0,0 "0,7037037"...!18.9999999	(17)	(7)	

*) Die 7 Drehungen in S5 können auch verkürzt eingekurbelt werden, was im ersten Fall eine positive und zwei negative Drehungen in S6 (entsprechend + 99 - 100(5)), 3 +Drehungen in S5 und 3 -Drehungen in S4 erfordert; entsprechend im zweiten Fall.

II. Umrechnen der Beiwerte b zur Eliminierung von b_1

0,0 !a_1!	0,0 !27! rot	(7)	
⊖ /b_1/a_1/	⊖ /0,7037037/	(7)	-Dreh.
/0,0/b_1 "(b_1-b_1/a_1)≈0,0"	/0,0/ 19,0 "0,0000001"	(14)	

0,0 !a_2!	0,0 !59! rot	(7)	
⊖ b_1/a_1	⊖ 0,7037037	(7)	-Dreh.
b_2 "b_2-(b_1/a_1).a_2"	963,0 "922,4814817"	(14)	

0,0 !a_3!	0,0 ! ⊖ 18 ! weiß	(7)	
⊖ b_1/a_1	⊖ 0,7037037	(7)	+Dreh.
b_3 "b_3- b_1/a_1 .a_3"	81 "93,666 666 6"	(14)	

III. Errechnen von y:

$$y = - \frac{b_3-(b_1/a_1).a_3}{b_2-(b_1/a_1).a_2} \qquad y = - \frac{93{,}666\ 666\ 6}{921{,}4814817-1000}$$

1. Divisionsverfahren

0,0 "y"	0,0 "⊕ 1,1929245" rot	(7)	
⊖ (b_2-b_1/a_1.a_2)	⊖ 78,5185183	(7)	-Dreh.
b_3-b_1/a_1.a_3 !≈0,0!	93,6666666 !0,000002416... ≈ 0,0!	(14)	

2. Divisionsverfahren

0,0 "⊕ 1,192 9245"	(7)	
⊕ 9921,4814817	(7)	+Dreh.
93,6666666 "1,1929245"...!0,000002416... ≈ 0,0!	(19)(14)	

Hier ist das Glied - 1000 durch die 99 in E 11/12 berücksichtigt.
Bei den Verfahren 1) und 2) sind die beiden -Vorzeichen (vor dem Bruchstrich und im Nenner) mit dem durch die (subtraktive) Division gegebenen -Vorzeichen des Einstellwertes e kombiniert und im wirksamen Vorzeichen von e - bzw. dessen dekadischer Einstellung - enthalten.

Ein 3. Divisionsverfahren:

0,0 "⊕ 1,1929245" weiß	(7)	
⊕ 78,5185183	(7)	+Dreh.
906,333 3334 !999,999 997 583 76835!	(14)	

Das -Vorzeichen vor dem Bruchstrich ist hier in r durch Einstellen der dekadischen Ergänzung, das -Zeichen des Nenners im wirksamen Vorzeichen von e berücksichtigt.

IV. Probe:

$$- \frac{b_1}{a_1} . (a_1+a_2+a_3) + (b_1+b_2+b_3) \qquad - \frac{19}{27}(27+59-18) + (19-37+81)$$

$$\overset{(-)}{=}\left(b_2-\frac{b_1}{a_1}.a_2\right) + \overset{(=)}{\left(b_3-\frac{b_1}{a_1}.a_3\right)} \overset{(-)}{=}(921,4814817-1000) + \overset{(=)}{93,666666}$$

3 Summierungen verkürzt dargestellt

0,0 !3x1!	I	0,0	!2-1=1!	(7)	
$a_1;a_2;a_3;$		27;+59;-18;		(7)	
0,0 "$a_1+a_2+a_3$"	S8	0,0	"68,0"	(14)	

0,0 !b_1/a_1!		0,0	!0,7037037! rot	(7)	
$\ominus(a_1+a_2+a_3)$		-/68,0/		(7)	-Dreh.
0,0 "$\ominus(b_1/a_1).(a_1+a_2+a_3)$"	S7 bis 1	/0,0/	"999952,1481484"	(14)	

3 Summierungen verkürzt dargestellt

0,0 !3x1!		0,0	!2 - 1 = 1!	(7)
$\oplus\, b_1;\ +b_2;\ b_3$		+19; -37; +81		(7)
= "$-(b_1/a_1)(a_1+a_2+a_3)+(b_1+b_2+b_3)$"	S8	=	"15,1481484"	(14)

0,0 !1,0!	0,0 !1,0! rot	(7)	
$\ominus\left(b_2-\frac{b_1}{a_1}\cdot a_2\right)$	$\ominus$ 99921,4814817	(7)	-Dreh.
= "$\approx b_3-\frac{b_1}{a_1}\cdot a_3$ "	= "900093,6666667"	(14)	

Entsprechend für $n \gtrless 3$

Die 99 in E 11, 12 entsprechen dem Glied -1000 in der Klammer; die 9 in R 20 rührt von der durch die Neunen links im E-Werk gebildeten, in E 13 zu denkenden "Zähleins" her und stellt die -1 des Z-Werkes dar.

5,2 Nichtlineare Gleichungssysteme

Es tritt in der Praxis sehr häufig der Fall auf, daß verschiedene Unbekannte durch recht verwickelte Gleichungen miteinander verbunden sind. Man hilft sich in solchen Fällen gerne durch einfaches Probieren, obwohl oft der Gebrauch der Differenzialrechnung schneller zum Ziele führen würde.

Dies läßt sich leicht an dem einfachsten Beispiel, an einem System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten

(1) $\quad F_1(x;y) = 0;$

(2) $\quad F_2(x;y) = 0$

zeigen. Und zwar sollen für einen bestimmten, in unmittelbarer Nähe der Lösung gelegenen Punkt $x_1;\ y_1$ nicht nur

(3) $\quad F_1(x_1;y_1);\quad F_2(x_1;\ y_1)$

wertmäßig bekannt sein, sondern auch die partiellen Ableitungen

(4) $\quad \frac{\delta F_1}{\delta x_1};\quad \frac{\delta F_1}{\delta y_1};\quad \frac{\delta F_2}{\delta x_1};\quad \frac{\delta F_2}{\delta y_1}.$

In unmittelbarer Nähe des Punktes x_1; y_1 gilt nun

$$(5) \qquad F_1(x;\ y) = F_1(x_1;y_1) + \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\,dy_1;$$

$$(6) \qquad F_2(x;\ y) = F_2(x_1;y_1) + \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\,dy_1,$$

wobei

$$(7) \qquad x = x_1 + dx_1;$$

$$(8) \qquad y = y_1 + dy_1$$

sind. Da infolge der Gleichungen (1); (2); (3); (4) in Gleichung (5) und (6) lediglich dx_1 und dy_1 unbekannt sind, handelt es sich bei Gleichung (5) und (6) um ein System von zwei <u>linearen</u> Gleichungen mit zwei Unbekannten (dx_1 und dy_1).

Man kann also in Gleichung (5) und (6) dx_1 und dy_1 nach dem bereits in Abschnitt 5,1 beschriebenen Verfahren zur Auflösung von 2 linearen Gleichungen mit 2 Unbekannten finden. Nachdem dx_1 und dy_1 bekannt, hat man nach Gleichung (7) und (8) sofort mit guter Annäherung x und y.

Dieses Verfahren, das hier nur an einem System von zwei nichtlinearen Gleichungen mit zwei Unbekannten gezeigt wurde, läßt sich ganz analog auf n nichtlineare Gleichungen mit n Unbekannten anwenden.

6. VERSCHIEDENES

6,1 Interpolation

Beim Aufschlagen von Logarithmen oder sonstigen Funktionen spielt die Interpolation eine große Rolle. Meistens handelt es sich um einfache Interpolation, die voraussetzt, daß die Funktion mit hinreichender Genauigkeit innerhalb des Interpolationsbereiches linear verläuft. Es soll nur diese lineare, normale Interpolation betrachtet werden.

In irgendeiner Funktionstafel seien u.a. die Punkte $P_1(x_1;y_1)$ und $P_2(x_2;y_2)$ verzeichnet.

In ähnlicher Weise wie bei der Lösung von Gleichungen nach der Interpolationsmethode (siehe Abschnitt 4,31), stellt man, falls (x_2-x_1) positiv ist,

$$e_l = x_2-x_1; \qquad e_r = y_2-y_1;$$

$$r_l = x_1 \quad; \qquad r_r = y_1$$

ein. Falls (x_2-x_1) negativ ist, stellt man

$$e_l = x_1-x_2; \qquad e_r = y_1-y_2;$$

$$r_l = x_1 \quad; \qquad r_r = y_1$$

ein. e_l ist also immer positiv einzustellen.

Wenn e_r; r_l; r_r nach dieser Anweisung negativ werden, sind sie entsprechend Abschnitt 1,4 durch Ergänzungszahlen darzustellen.

Ist außerdem die Kommaregel beachtet, zeigen R_l und R_r nach jeder beliebigen Kurbeldrehung x- und y-Koordinaten der Geraden P_1P_2.

In einem Beispiel ist bei x = 12,0 und 12,5 eine Funktion y = 273,22 und 277,63.

$x_1 = 12,0$; $\qquad y_1 = 273,22$;

$x_2 = 12,5$; $x_2 - x_1 = +0,5 \qquad y_2 = 277,63$. $y_2 - y_1 = +4,41$

Durch willkürlich gewählte Kommata 4 Stellen in Z, ferner 12 und 2 Stellen in E, schließlich 4+12 = 16 und 4+2 = 6 Stellen in R abtrennen. Hierauf

$e_l = 0,5\ (12)$; $\qquad e_r = 4,41\ (2)$;

$r_l = 12,0\ (16)$; $\qquad r_r = 273,22\ (6)$

einstellen.

Will man ein y finden, das einem x = 12,1 zugeordnet ist, kurbelt man, bis $r_l = 12,1(16)$ ist, und hat $y = r_r = 274,102(6)$.

Will man ein x finden, das einem y = 275 zugeordnet ist, hat man nach 0,4037(4) Umdrehungen bei

y = 275,000 317(6) ein x = 12,20185(16).

Auch eine Kontrolle ist leicht möglich: Bei $r_l = 12,5(16)$ muß $r_r = 277,63(6)$ erscheinen.

1. Argumentwert x gegeben, Funktionswert y gesucht.

0,0	"z"
(x_2-x_1)...	(y_2-y_1)
x_1........	y_1
x!........	"y"

a)

0,0		"z"	(4)
0,5	...	4,41	(12)(2)
12,0	...	273,22	
12,1!	...	"274,102"	(16)(6)

2. Funktionswert y gegeben, Argumentwert x gesucht.

	"z"
(x_2-x_1)...	(y_2-y_1)
x_1-	y_1
"x"	... !y!

b)

0,0		"z"	(4)
0,5	..	4,41	(12)(2)
12,0	..	273,22	
12,20185	......	!275,000317!	(16)(6)

6,2 Umwandlung von Winkelteilungen

6,21 Umwandlung von Altgrad in Neugrad

Das 1941 von Harkink veröffentlichte Verfahren beruht auf der Überlegung, daß

$$1^o = \frac{100}{90}\ g = \frac{90}{81}\ g;$$

$$1' = \frac{1,5}{90}\ ^o = \frac{1,5}{81}\ g = \frac{150}{81} . 0,01^g = \frac{90+60}{81} . 0,01^g ;$$

$$1'' = \frac{1}{60}\ ' = \frac{2,5}{150} \cdot \frac{1,5}{81}\ g = \frac{250}{81} . 0,0001^g = \frac{90+60+100}{81} . 0,0001^g$$

ist und daher beispielsweise

$$(1) \qquad 162^o 55' 23'' = \frac{162,5523 . 90 + 0,5523 . 60 + 0,0023 . 100}{81}\ g.$$

Um 162°55'23" in Neugrade umzuwandeln, durch Kommata 5; 7; 5+7 = 12 Stellen in Z; E; R abtrennen, e = 162,5523(7) mit z = 90(5) multiplizieren, dazu das Produkt e . z = 0,5523(7) . z = 60 (5) und das Produkt e . z = 0,0023(7) . z = 100(5) addieren.

Bei diesen Additionen ist die Löschung von z nicht notwendig, wenn $z_1 = 90(5)$ in $z_2 = 150(5)$ und $z_3 = 250(5)$ umgekurbelt wird.

Es ist r = 162,5523 . 90 + 0,5523 . 60 + 0,0023 . 100 = 14663,075(12).

Die anschließende Division von r durch e = 81(7) liefert das Resultat 162° 55'23" = 181,02562(5)^g.

0,0 !90,0!	0,0 !90,0!	(5)	
$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$	162,5523	(7)	+Dreh.
0,0 "r_1"	0,0 "14629,707"	(12)	
90 !150,0!	90,0 !150,0!	(5)	
$\alpha_2+\alpha_3$	0,5523	(7)	+Dreh.
r_1 "r_2"	= "14662,845"	(12)	
150 !250,0!	150 !250,0!	(5)	
α_3	0,0023	(7)	+Dreh.
r_2 "r_3"	= "14663,075"	(12)	
0,0 "$\beta_1+\beta_2+\beta_3$"rot	0,0 "181,02562" rot	(5)	
⊖ 81	⊖ 81	(7)	-Dreh.
r_3 !≈0,0!	= !99999999,99978!	(12)	

6,22 <u>Umwandlung von Neugrad in Altgrad</u>

Die Rückverwandlung von 181,02562^g in alte Teilung ist gleichfalls schnell durchgeführt. Zu dem Zweck e = 181,02562(7) mit z = 81(5) multiplizieren.

Das Produkt r = 14663,07522(12) nach Löschung von E und Z durch e = 90(7) dividieren, wobei durch Kurbeldrehungen in den Schlittenstellungen S8; S7 und S6 die Zahl r = 14663,07522(12) auf den <u>kleinsten positiven</u> Rest abgebaut wird. Es erscheinen z = -162(5) und r = 83,07522(12).

In E 150(7) statt 90(7) einstellen und r durch Kurbeldrehungen in den Schlittenstellungen 5 und 4 auf den kleinsten positiven Rest abbauen. Es erscheinen z = -162,55(5) und r = 0,57522(12).

In E 250(7) statt 150(7) einstellen und r durch Kurbeldrehungen in den Schlittenstellungen 3; 2 und 1 auf einen nullnahen Wert abbauen. Es erscheint z = -162,55230(5).

Das ist gleichbedeutend mit dem Ergebnis 181,02562^g = 162°55'23,0".

Da die Größenordnung der Winkel praktisch immer die gleiche ist, empfiehlt es sich, alle Winkelumwandlungen stets mit den gleichen Kommastellungen durchzuführen. Dann bleiben auch die Daten über die Schlittenstellungen unverändert.

0,0 !81!	0,0 !81!	(5)	
$\beta_1+\beta_2+\beta_3$	181,02562	(7)	+Dreh.
0,0 "r'_1"	0,0 "14663,07522"	(12)	
0,0 "α_1"	0,0 "162,0" rot	(5)	
⊖ 90,0	⊖ 90,0	(7)	-Dreh.
r_1' !min r_2'!	= !83,07522!	(12)	
α_1 "$\alpha_1+\alpha_2$"	162,0 "162,55"	(5)	
⊖ 150,0	⊖ 150,0	(7)	-Dreh.
r_2' !min r_3'!	= !0,57522!	(12)	
$\alpha_1+\alpha_2$ "$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$"	162,55 "162,55230" rot	(5)	
⊖ 250,0	⊖ 250,0	(7)	-Dreh.
r_3' !≈0!	= !0,00022!	(12)	

Literaturverzeichnis

1) Dr.-Ing. Manfred von Stein,
"Allgemeine mathematische Berechnungen mit der Brunsviga 20."

2) Dr. K. Herrmann, Vermessungsrat,
"Quadratwurzelziehen mit der Rechenmaschine",
Allgemeine Vermessungsnachrichten 1937, Nr. 16, Seite 270 bis 276.

3) Dr. K. Herrmann, Vermessungsrat,
"Genauigkeitssteigerung beim Quadratwurzelziehen mit der Rechenmaschine",
Allgemeine Vermessungsnachrichten 1938, Nr. 7, Seite 112 bis 116.

4) Brunsviga Maschinenwerke Grimme, Natalis & Co. A.G.
"Spezialrechnung mit Hilfe der Brunsviga-Rechenmaschine,
System Trinks: Lösung von $\sqrt[3]{x}$".

5) Faber,
"Auflösung quadratischer Gleichungen",
Vermessungstechnische Rundschau, Zeitschrift für Vermessungswesen,
Heft 9, Oktober 1949, Seite 129 bis 132.

6) Harkink,
"Umwandlung von Winkelteilungen mittels der Rechenmaschine",
Allgemeine Vermessungsnachrichten 1940, Seite 378.

7) Dipl.-Ing. Heinz Wittke, Vermessungsrat,
"Die Rechenmaschine und ihre Rechentechnik".

8) Meyer zur Capellen,
"Mathematische Instrumente".

9) Verschiedene Rechenanleitungen für Brunsviga-Rechenmaschinen.